Problema 3. Dados los puntos $A = (2, 0, 0)$ y $B = (0, 1, 0)$, y la recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$

a) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B. *(2 puntos)*
b) Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r. *(4 puntos)*
c) Calcular la distancia del punto A a la recta s. *(4 puntos)*

Solución:

a) ¿r? / r es la recta que pasa por A y B.

De la recta r conocemos $\begin{cases} \text{punto} \quad A(2,0,0) \\ \text{vector director } \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (-2,1,0) \end{cases} \rightarrow r: \frac{x-2}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$

La ecuación de la recta r como intersección de dos planos:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{-2} = \frac{y}{1} \\ \frac{x-2}{-2} = \frac{z}{0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2 = -2y \\ 0 = -2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Solución: $r: \begin{cases} x+2y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

b) ¿Plano π*? /* $s \subset \pi$ *y* $\pi // r$

$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$

Para obtener la ecuación del plano necesitamos un punto y dos vectores directores de él.

Punto, como $s \subset \pi \rightarrow P_s \in \pi \rightarrow P_s(1,1,0)$

Vectores directores, $\begin{cases} s \subset \pi \rightarrow \vec{u} = \vec{v}_s = (2,3,1) \\ \pi // r \rightarrow \vec{v} = \vec{v}_r \ (-2,1,0) \end{cases}$

La ecuación del plano π *la obtenemos calculando:*

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$(x-1)(-1) - (y-1)2 + z8 = 0$$

$$-x+1-2y+2+8z = 0 \rightarrow -x-2y+8z+3 = 0 \rightarrow x+2y-8z-3 = 0$$

Solución: la ecuación del plano π ***es*** $x + 2y - 8z - 3 = 0$.

c) ¿d(A,s)?

$$A(2,0,0) \quad y \quad s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z \quad \rightarrow \quad \begin{cases} P_s(1,1,0) \\ \vec{v}_s(2,3,1) \end{cases}$$

$$d(A,s) = \frac{\left|\overrightarrow{AP_s} \times \vec{v}_s\right|}{\left|\vec{v}_s\right|}$$

$$\overrightarrow{AP_s} = (-1,1,0)$$

$$\overrightarrow{AP_s} \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 1 - \vec{j} \cdot (-1) + \vec{k} \cdot (-3-2) = \vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k} = (1,1,-5)$$

$$\left|\overrightarrow{AP_s} \times \vec{v}_s\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-5)^2} = \sqrt{27}$$

$$\left|\vec{v}_s\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$Finalmente,\ d(A,s) = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{14}} \cong 1'38873...$$