Problema 4. Dados los puntos $A = (2, 1, -2)$ y $B = (3, 2, 3)$, y el plano π definido por $2x + 2y + z = 3$, obtener:

a) El punto de corte C entre el plano π y la recta perpendicular a π que pasa por B. *(5 puntos)*

b) El área del triángulo cuyos vértices son A, B y C. *(5 puntos)*

Solución:

a) Llamando r a la recta perpendicular a π que pasa por B. Obtengamos la ecuación de r.

De la recta r conocemos $\begin{cases} punto \quad B(3,2,3) \\ vector\ director, \quad r \perp \pi \quad \rightarrow \quad \vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (2,2,1) \end{cases} \rightarrow \quad r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$

Sustituyendo los valores de x, y, z de r en la ecuación del plano π,

$2(3 + 2\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + 3 + \lambda = 3; \quad 6 + 4\lambda + 4 + 4\lambda + 3 + \lambda = 3; \quad 9\lambda + 13 = 3; \quad 9\lambda = -10;$

$\lambda = \frac{-10}{9}$

El punto C lo obtendremos sustituyendo este valor de λ en la ecuación de r:

$$\begin{cases} x = 3 + 2\frac{-10}{9} = \frac{7}{9} \\ y = 2 + 2\frac{-10}{9} = \frac{-2}{9} \\ z = 3 + \frac{-10}{9} = \frac{17}{9} \end{cases} \rightarrow \quad C = \left(\frac{7}{9}, \frac{-2}{9}\, \frac{17}{9}\right)$$

Solución: $C = \left(\frac{7}{9}, \frac{-2}{9}\, \frac{17}{9}\right)$.

b) Área del triángulo de vértices A, B y C.

El área de este triángulo la calculamos mediante la fórmula $A_T = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{BC}\right|$

$$\vec{AB} = (1,1,5), \quad \vec{BC} = \left(\frac{7}{9} - 3, \frac{-2}{9} - 2, \frac{17}{9} - 3\right) = \left(\frac{-20}{9}, \frac{-20}{9}, \frac{-10}{9},\ \right),$$

$$\vec{AB} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 5 \\ \frac{-20}{9} & \frac{-20}{9} & \frac{-10}{9} \end{vmatrix} = \frac{-10}{9}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-10}{9}\left(\vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= \frac{-10}{9}\left(-9\vec{i} + 9\vec{j}\right) = 10\vec{i} - 10\vec{j} = (10, -10, 0)$$

$$\left|\vec{AB} \times \vec{BC}\right| = \sqrt{10^2 + (-10)^2 + 0^2} = 10\sqrt{2}; \qquad A_T = \frac{1}{2}10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}\ u.a. \approx 7'0711\ u.a.$$

El área del triángulo pedida es $5\sqrt{2}$ u.a.