Problema 6. Considerar la función $f(x) = e^{-x^2}$ para los valores positivos de x. Por cada punto $M = (x, f(x))$ de la gráfica de f se trazan dos rectas paralelas a los ejes coordenados, OX y OY. Estas dos rectas, junto con los ejes de coordenadas, definen un rectángulo.

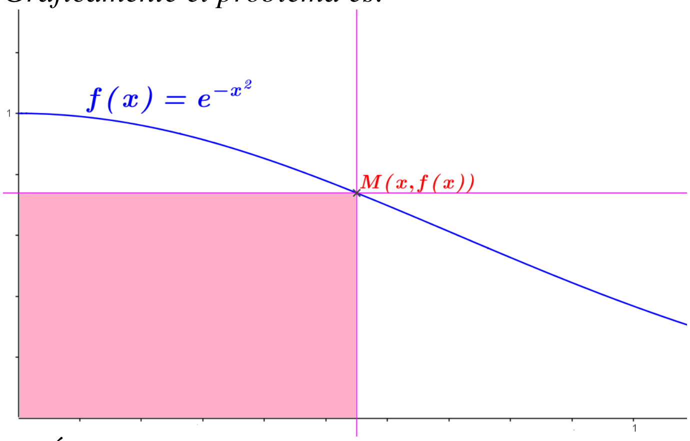
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Determinar el área del rectángulo en función de x. *(3 puntos)*

b) Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área. *(7 puntos)*

Solución:

Gráficamente el problema es:



a) Área del rectángulo en función de x

El rectángulo definido tiene de base x *y de altura* $f(x) = e^{-x^2}$

Su área es: $A_R(x) = x\, e^{-x^2} \quad x > 0$

b) ¿M? / A_R *sea máxima*

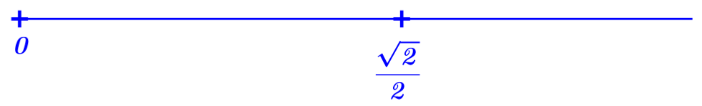
$$A_R(x) = x\, e^{-x^2}$$

$$A'_R(x) = e^{-x^2} + x\, e^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right)$$

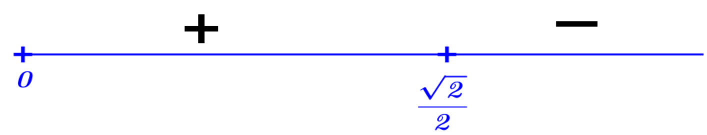
$$A'_R(x) = 0 \quad \rightarrow \quad e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right) = 0 \quad \begin{cases} e^{-x^2} = 0 \quad \text{sin } solución \\ \left(1 - 2x^2\right) = 0 \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \dfrac{1}{2} \rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$Como \quad x > 0, \quad solución \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0'7071\ldots$$

Debemos estudiar el signo de $A'_R(x)$ *en los intervalos:*



x	$A'_R(x)$
$0'5$	$e^{-0'5^2}\left(1 - 2 \cdot 0'5^2\right) = 0'38\ldots > 0$
1	$e^{-1^2}\left(1 - 2 \cdot 1^2\right) = -0'367\ldots < 0$



El máximo relativo se alcanza en $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *que es el absoluto porque a su izquierda la función es creciente y a su derecha decreciente.*

Calculemos el punto M,

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=e^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}} \quad \rightarrow \quad M\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

Y el área máxima

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad A_R\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{-1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}\cong 0´4289\ u.a.$$

Solución: el punto M que proporciona mayor área es $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ***y esta área mide*** $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}$ *u.a.*