Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Discutir el sistema en función del parámetro a. *(6 puntos)*

b) Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado. *(4 puntos)*

Solución:

a)

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a+1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 & 2 \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{vmatrix} = 2a(a+2)+1+2(a+1)-a-(a+1)(a+2)-4 =$$

$$= 2a^2+4a+1+2a+2-a-\left(a^2+3a+2\right)-4 = 2a^2+5a-1-a^2-3a-2 = a^2+2a-3$$

$$a^2+2a-3=0; \quad a = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} = \frac{-2\pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

Si $a \neq -3$ *y* 1

$|A| \neq 0 \rightarrow$ *ran(A) = 3, y como el máximo rango de A´ es 3* $\rightarrow$ *ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.*

Si $a = -3$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Sabemos que $|A| = 0$*, estudiemos el rango de A,*

En A, $\left.\begin{array}{l} |-2| = -2 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) = 2$

En A´, $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8+1-2+4 = 11 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 3$

Por lo tanto, ran(A) = 2 $\neq$ *3 = ran(A´), luego el sistema es incompatible.*

Si a = 1

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, *estudiemos el rango de A,*

$$\text{En A,} \quad \left.\begin{array}{l} |2| = 2 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) = 2$$

$$\text{En } A', \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3 + 1 + 2 - 6 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 2$$

Por lo tanto, ran(A) = ran(A´) = 2 < 3(nº de incógnitas), luego el sistema es compatible indeterminado.

Por tanto, ***si a ≠ – 3 y 1, el sistema es compatible determinado;***
si a = – 3, el sistema es incompatible;
si a = 1, el sistema es compatible indeterminado.

b) El sistema es compatible indeterminado para a = 1 y el menor de orden 2 no nulo de A corresponde a las ecuaciones 1ª y 2ª y a las incógnitas y z.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} 2y + z = -1 - 2x \\ y + 2z = 1 - x \end{cases}$. *Sabemos que* $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

Resolviendo por Cramer,

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1-2x & 1 \\ 1-x & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-2-4x-1+x}{3} = \frac{-3-3x}{3} = -1 - x$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1-2x \\ 1 & 1-x \end{vmatrix}}{3} = \frac{2-2x+1+2x}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Las soluciones del sistema cuando es compatible indeterminado son: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 - \lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 1 \end{cases}$