Problema 2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtener:

a) La matriz $M = (A - \alpha I)^2$, donde α es un parámetro real. *(6 puntos)*
b) El valor de α, si existe, para el cual la matriz M es la matriz nula. *(4 puntos)*

Solución:
a) Calculemos $M = (A - \alpha I)^2$.

$$A-\alpha I=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3-\alpha \end{pmatrix}$$

$$(A-\alpha I)^2=\begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3-\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3-\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2+1-2 & \alpha+\alpha-2 & 2\alpha+2-6+2\alpha \\ \alpha+\alpha-2 & 1+\alpha^2-2 & 2\alpha+2-6+2\alpha \\ -\alpha-1+3-\alpha & -1-\alpha+3-\alpha & -2-2+(3-\alpha)^2 \end{pmatrix}=$$

$$-4+9-6\alpha+\alpha^2=\alpha^2-6\alpha+5$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha^2-1 & 2\alpha-2 & 4\alpha-4 \\ 2\alpha-2 & \alpha^2-1 & 4\alpha-4 \\ -2\alpha+2 & -2\alpha+2 & \alpha^2-6\alpha+5 \end{pmatrix}$$

$$Luego,\quad M=\begin{pmatrix} \alpha^2-1 & 2\alpha-2 & 4\alpha-4 \\ 2\alpha-2 & \alpha^2-1 & 4\alpha-4 \\ -2\alpha+2 & -2\alpha+2 & \alpha^2-6\alpha+5 \end{pmatrix}$$

b) El valor de α*, si existe, para el cual la matriz* M *es la matriz nula.*
Para que M *sea una matriz nula todos sus elementos deben ser nulos.*

$$\begin{cases} \alpha^2-1=0 & \rightarrow\ \alpha^2=1\ \rightarrow\ \alpha=\pm\sqrt{1}=\pm 1 \\ 2\alpha-2=0 & \rightarrow\ 2\alpha=2\ \rightarrow\ \alpha=1 \\ 4\alpha-4=0 & \rightarrow\ 4\alpha=4\ \rightarrow\ \alpha=1 \\ -2\alpha+2=0 & \rightarrow\ -2\alpha=-2\ \rightarrow\ \alpha=1 \\ \alpha^2-6\alpha+5=0 & \rightarrow\ \alpha=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1}=\dfrac{6\pm 4}{2}=\begin{cases} \dfrac{6+4}{2}=5 \\ \dfrac{6-4}{2}=1 \end{cases} \end{cases}$$

Por tanto, todos los elemento de la matriz M *son nulos cuando* $\alpha = 1$.

Solución: $\boldsymbol{\alpha = 1}$.