Problema 4. Dada la recta *r: (x,y,z)* = (1,1,0) + λ (– 1,– 1,2), y el plano *π: 5 x + m y + z = 2:*

a) Obtener la posición relativa de r y π en función de m. *(6 puntos)*

b) Para $m = 1$, calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π. *(4 puntos)*

Solución:

a) Posición relativa de r y π en función de m.

A partir de la ecuación vectorial de la recta r escribimos la paramétrica $\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$

Sustituyendo el valor de x, y, z de r en la ecuación del plano π:

$5(1-\lambda)+m(1-\lambda)+2\lambda = 0$, *en esta ecuación la incógnita es* λ *y* m *es un parámetro.*

$$5-5\lambda+m-m\lambda+2\lambda = 0$$

$$5-3\lambda+m-m\lambda = 2$$

$$-3\lambda-m\lambda = 2-5-m$$

$$(-3-m)\lambda = -3-m$$

Estudiemos la ecuación final, $-3-m=0 \rightarrow m=-3$

Si $m = -3$, *la ecuación anterior queda* $0\lambda = 0 \rightarrow 0 = 0$ *que es una identidad; por tanto la ecuación tendría infinitas soluciones y esto quiere decir que la recta está contenida en el plano.*

Si $m \neq -3 \rightarrow -3-m \neq 0 \rightarrow$ *la solución de la ecuación sería* $\lambda = \dfrac{-3-m}{-3-m} = 1$; *por tanto la ecuación tiene una única solución y esto quiere decir que la recta y el plano se cortan en un punto.*

Solución: ***si*** $m = -3$, $r \subset \pi$

si $m \neq -3$, r ***y*** π ***se cortan en un punto.***

b) Para $m = 1$, *¿plano* π'*? /* $r \subset \pi'$ *y* $\pi' \perp \pi$

Representamos por $\vec{n}_\pi$ *el vector perpendicular al plano π,* $\vec{n}_\pi(5,1,1)$.

Como $\pi' \perp \pi \rightarrow \vec{n}_\pi$ *es director de* π'

Como $r \subset \pi \rightarrow \begin{cases} \text{el punto de } r \quad (1,1,0) \in \pi' \\ \vec{v}_\pi(-1,-1,2) \quad \text{es director de } \pi' \end{cases}$

Entonces del plano π´ tenemos un punto y dos vectores directores, la ecuación del plano π´ la obtenemos calculando:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 5 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$(x-1)\cdot 3-(y-1)\cdot 11+z\cdot(-4) = 0$$

$$3x-3-11y+11-4z = 0 \rightarrow 3x-11y-4z+8 = 0$$

Solución: la ecuación del plano π´ es 3 x – 11 y – 4 z + 8 = 0.