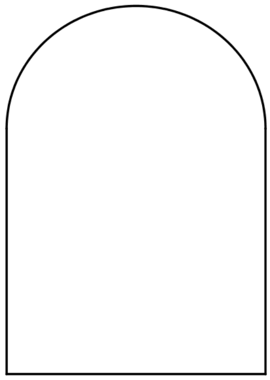
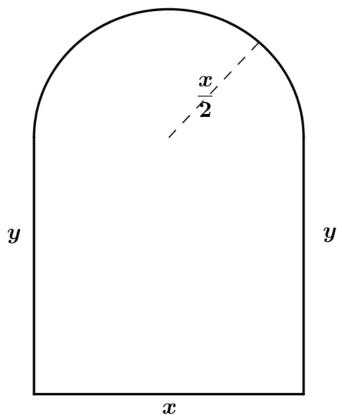
Problema 6. Una ventana rectangular está coronada por un semicírculo tal y como se indica en la siguiente figura.



Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 20 metros:

a) Calcular el área de la ventana en función de su anchura x. *(3 puntos)*
b) Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz. *(5 puntos)*
c) Calcular el valor de dicha área máxima. *(2 puntos)*

Solución:
La anchura de la ventana es x, la altura de la parte rectangular y, el radio del semicírculo superior es $x/2$.



El perímetro de la ventana es de 20m.

La longitud del semicírculo es: $\pi\frac{x}{2}$.

El perímetro de la ventana es: $x+2y+\frac{\pi}{2}x$

Como hay que obtener el área de la ventana en función de x, despejemos y:

$$x+2y+\frac{\pi}{2}x=20;\quad 2y=20-x-\frac{\pi}{2}x;\quad 2y=20-\left(1+\frac{\pi}{2}\right)x$$

$$y=\frac{20-\left(1+\frac{\pi}{2}\right)x}{2}=\frac{20-\left(\frac{2+\pi}{2}\right)x}{2}=10-\frac{2+\pi}{4}x$$

a) Área de la ventana,
Área de la ventana = Área del rectángulo (xy) + Área del semicírculo,

$$A(x)=x\left(10-\frac{2+\pi}{4}x\right)+\frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}=10x-\frac{2+\pi}{4}x^2+\frac{\pi\frac{x^2}{4}}{2}=10x-\frac{2+\pi}{4}x^2+\frac{\pi}{8}x^2=10x-\left(\frac{2+\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)x^2=$$
$$=10x-\left(\frac{4+2\pi-\pi}{8}\right)x^2=10x-\frac{4+\pi}{8}x^2$$

Como x e y son longitudes, $x, y > 0$ (si alguna es 0 no hay ventana), por tanto $10-\frac{2+\pi}{4}x>0$,

$$10>\frac{2+\pi}{4}x,\quad 40>(2+\pi)x,\quad x<\frac{40}{2+\pi}\cong 7'7797$$

Finalmente, el área de la ventana en función de su anchura, x, es

$$A(x)=10x-\frac{4+\pi}{8}x^2 \qquad x\in\left(0,\frac{40}{2+\pi}\right) \quad \textbf{\textit{x en metros.}}$$

b) Dimensiones de la ventana que permita la máxima entrada de luz.

Buscamos el área máxima.

$$A'(x) = 10 - \frac{4+\pi}{8} 2x = 10 - \frac{4+\pi}{4} x$$

$$A'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 10 - \frac{4+\pi}{4} x = 0 \quad \rightarrow \quad 10 = \frac{4+\pi}{4} x \quad \rightarrow \quad x = \frac{40}{4+\pi} \cong 5'60009 \in \left(0, \frac{40}{2+\pi}\right)$$

Como $A'(x)$ es un polinomio de primer grado con coeficiente de x negativo, es una recta de pendiente negativa, entonces a la izquierda de su raíz es positiva y a la derecha negativa.

En $x = \dfrac{40}{4+\pi}$ hay un máximo local y como A(x) a la izquierda es creciente y a la derecha decreciente, este máximo local es el absoluto.

$$\text{Para} \quad x = \frac{40}{4+\pi}, \quad y = 10 - \frac{2+\pi}{4}\frac{40}{4+\pi} = 10 - \frac{10(2+\pi)}{4+\pi} = 10 - \frac{20+10\pi}{4+\pi} = \frac{40+10\pi-20-10\pi}{4+\pi} = \frac{20}{4+\pi}$$

Por tanto, ***las dimensiones de la ventana que permite la máxima entrada de luz son:***

$$\textbf{parte rectángular} \left\langle \begin{array}{l} \text{base} \quad \dfrac{40}{4+\pi} m. \\ \text{altura} \quad \dfrac{20}{4+\pi} m. \end{array} \right. \qquad \textbf{y semicírculo superior de radio} \quad \frac{20}{4+\pi} m.$$

c) Valor del área máxima.

$$A(x) = 10x - \frac{4+\pi}{8} x^2$$

$$\text{para} \quad x = \frac{40}{4+\pi} \quad \rightarrow \quad A\left(\frac{40}{4+\pi}\right) = 10\frac{40}{4+\pi} - \frac{4+\pi}{8}\left(\frac{40}{4+\pi}\right)^2 = \frac{400}{4+\pi} - \frac{4+\pi}{8}\frac{1600}{(4+\pi)^2} = \frac{400}{4+\pi} - \frac{200}{4+\pi} =$$

$$= \frac{200}{4+\pi} \cong 28'005$$

El área máxima mide: $\dfrac{200}{4+\pi} m^2 \cong \mathbf{28'005\ m^2}$**.**