EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Para cada terna de números reales (x,y,z), se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & y & -1 \\ 2 & z & -1 \end{pmatrix}$$

i) Calcular los determinantes de las matrices A y B . (*1 punto*)

ii) Para x=y=z=1, calcular el determinante de la matriz producto A B . (*0,3 puntos*).

iii) Obtener, razonadamente, para que valores de x, y, z, ninguna de las matrices A y B tiene inversa. (*2 puntos*).

Solución:

i)

$$|A|=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix}=5x+5z-3y-3z-5y+5x=10x-8y+2z$$

$$|B|=\begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & y & -1 \\ 2 & z & -1 \end{vmatrix}=-2x+z-2x-2y+2z+x=-x-4y+3z$$

ii) Para x = y = z = 1

El determinante de la matriz producto es el producto de los determinantes, luego

det (A . B) = det (A) . det (B) = (10 . 1 – 8 . 1 + 2 . 1) (– 1 – 4 . 1 + 3 . 1) = 4 (– 2) = – 8

iii) Para que A y B no tengan inversa sus determinantes deben ser nulos. Debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} 10x-8y+2z=0 \\ -x-4y+3z=0 \end{cases}$$

Como es un sistema homogéneo, será compatible. Veamos el rango de la matriz de coeficientes,

$$\begin{vmatrix} 10 & -8 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}=-40-8=-48\neq 0 \quad\to\quad ran(M)=2<n^{o}\ incógnitas \quad\to\quad S.C.\ Inde.$$

Resolvemos el sistema usando x e y como incógnitas principales,

$$\begin{cases} 10x-8y=-2z \\ -x-4y=-3z \end{cases} \quad\to\quad \begin{matrix} :2 \\ x(-1) \end{matrix}\begin{cases} 5x-4y=-z \\ x+4y=3z \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones: 6 x = 2 z ; x = z/3

Sustituyendo en la 2ª ecuación,

$$\frac{z}{3}+4y=3z \quad\to\quad 4y=3z-\frac{z}{3} \quad\to\quad 4y=\frac{8z}{3} \quad\to\quad y=\frac{2z}{3}$$

Solución: los valores de x, y, z para los que ninguna de las matrices A y B tiene inversa son:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{3}\lambda \\ y=\frac{2}{3}\lambda \qquad \lambda\in\Re \\ z=\lambda \end{cases}$$