Matemáticas II Junio 2002

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Para cada número real $\lambda, M(\lambda)$ es la matriz $M(\lambda)=\begin{pmatrix}4 & 3 & \lambda\\ 2 & 1 & 2\\ \lambda & \lambda & -1\end{pmatrix}$ Se pide:

i) Obtener el determinante de la matriz $M(\lambda)$, y justificar que para cualquier número real λ existe la matriz $M(\lambda)^{-1}$ inversa de $M(\lambda)$. *(1,3 puntos).*

ii) Calcular la matriz $M(0)^{-1}$ (*1 punto*)

iii) Si A=M(8), B=M(4) y C=M(3), calcúlese, razonadamente el determinante de la matriz producto $A\,B^{-1}\,C^{-1}$. (*1 punto*)

Solución:

i)

$$|M(\lambda)|=\begin{vmatrix}4 & 3 & \lambda\\ 2 & 1 & 2\\ \lambda & \lambda & -1\end{vmatrix}=-4+2\lambda^2+6\lambda-\lambda^2-8\lambda+6=\lambda^2-2\lambda+2$$

Veamos para que valores de λ $|M(\lambda)|=0$

$$\lambda^2-2\lambda+2=0 \quad\rightarrow\quad \lambda=\frac{2\pm\sqrt{4-4\,.\,1\,.\,2}}{2\,.\,1}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}$$ *no tiene soluciones reales*

Es decir que para cualquier valor de $\lambda\in\Re$ $|M(\lambda)|\neq 0$ *por lo que* $\forall\lambda\in\Re \quad \exists\ M(\lambda)^{-1}$

ii)

$$M(0)=\begin{pmatrix}4 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad |M(0)|=0^2-2\,.\,0+2=2$$

$$\begin{pmatrix}4 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{\alpha_{i\,j}}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 3\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ -3 & -4 & 0\\ 6 & 8 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{A_{i\,j}}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & -4 & 0\\ 6 & -8 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{A_{j\,i}}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 6\\ 2 & -4 & -8\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\quad M(0)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 6\\ 2 & -4 & -8\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 3\\ 1 & -2 & -4\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

iii)

Aplicando que $|A\,.\,B|=|A|\,|B|$ *y que* $\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}$

$$\left|A\,.\,B^{-1}\,.\,C^{-1}\right|=|A|\left|B^{-1}\right|\left|C^{-1}\right|=|A|\frac{1}{|B|}\frac{1}{|C|}=|M(8)|\frac{1}{|M(4)|}\frac{1}{|M(3)|}=$$

$$\left(8^2-2\,.\,8+2\right)\frac{1}{4^2-2\,.\,4+2}\,\frac{1}{3^2-2\,.\,3+2}=50\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{5}=1$$