EJERCICIO B

PROBLEMA 2. a) Hallar la distancia del punto P=(3,-1,4) a la recta r intersección de los planos: (*1,8 puntos*)

$$\pi_1: \quad 2x + y - z + 5 = 0$$
$$\pi_2: \quad 4x + 4y - z + 9 = 0$$

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta r y el punto P. (*1,5 puntos*)

Solución:

a) *Como al sustituir las coordenadas del punto P en el primer plano, 2 . 3 – 1 – 4 + 5 = 6, el punto P no pertenece a la recta r. Calculamos la distancia entre P y r mediante la expresión.*

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{P_r P} \times \overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}$$

Para utilizar esta expresión debemos conocer un punto de la recta r y su vector director. Obtengamos las ecuaciones paramétricas de r. Resolvemos el sistema formado por los dos planos

$$\begin{cases} 2x + y - z + 5 = 0 \\ 4x + 4y - z + 9 = 0 \end{cases} \quad \textit{como} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4 \neq 0$$

podemos tomar x e y como incógnitas principales, el sistema a resolver sería

$$\begin{cases} 2x + y = -5 + z \\ 4x + 4y = -9 + z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5+z & 1 \\ -9+z & 4 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-20 + 4z + 9 - z}{4} = \frac{-11}{4} + \frac{3}{4}z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5+z \\ 4 & -9+z \end{vmatrix}}{4} = \frac{-18 + 2z + 20 - 4z}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z$$

Las ecuaciones paramétricas de r serán

$$r: \begin{cases} x = \dfrac{-11}{4} + \dfrac{3}{4}\lambda \\ y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\lambda \qquad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\textit{para } \lambda = 5 \quad \begin{cases} x = \dfrac{-11}{4} + \dfrac{3}{4}5 = \dfrac{-11+15}{4} = 1 \\ y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}5 = \dfrac{1-5}{2} = -2 \\ z = 5 \end{cases} \qquad \textit{luego} \quad P_r(1, -2, 5) \quad y \quad \overrightarrow{v_r}\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{2}, 1\right) = (3, -2, 4)$$

$$\overrightarrow{P P_r}(3-1, -1+2, 4-5) = (2, 1, -1)$$

$$\overrightarrow{P P_r} \times \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (2, -11, -7)$$

$$\left|\overrightarrow{P P_r} \times \overrightarrow{v_r}\right| = \sqrt{2^2 + (-11)^2 + (-7)^2} = \sqrt{4 + 121 + 49} = \sqrt{174}$$

$$\left|\overrightarrow{v_r}\right| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29}$$

$$d(P, r) = \frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \sqrt{\frac{174}{29}} = \sqrt{6} \; u.\,l.$$

b) *Al plano que pasa por la recta r y el punto P lo llamamos* δ

De este plano conocemos un punto y dos vectores directores que son,

$$Punto\ P(3,-1,4)$$

$$vector\quad \vec{u} \equiv \vec{v_r}\,(3,-2,4)$$

$$vector\quad \vec{w} \equiv \overrightarrow{P\,P_r}\,(2,2,-1)$$

La ecuación implícita del plano será $\begin{vmatrix} x-3 & 3 & 2 \\ y+1 & -2 & 1 \\ z-4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$

Desarrollando por la primera columna,

$$(x-3)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + (z-4)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-3)\,(2-4) - (y+1)\,(-3-8) + (z-4)\,(3+4) = 0$$

$$-2x+6+11y+11+7z-28=0$$

$$-2x+11y+7z-11=0$$

El plano que pasa por la recta r y el punto P es $\delta : -2x+11y+7z-11=0$