EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Considerar las funciones definidas para $x \geq 0,\quad f(x) = arcsen\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\quad y\quad g(x) = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Calcular *f´(x) y g´(x)* y expresarlas del modo más simplificado posible. (*2 puntos*)
Comparar los resultados y deducir justificadamente la diferencia entre *f(x) y g(x)*. (*1,3 puntos*)

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}\,\frac{\sqrt{1+x^2} - x\,\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\,\frac{\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2-x^2}{1+x^2}}}\,\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}}\,\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}\,\frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}}\,\frac{\frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2-1}{1+x^2}}}\,\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}}\,\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}\,\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \overset{(a)}{=} \frac{1}{1+x^2}$$

$$(a)\ como\ x \geq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{x^2}} = 1$$

Lo obtenido indica que f'(x) = g'(x).

Como f(x) y g(x) tienen la misma derivada ambas funciones se diferencian en una constante, es decir, ***f(x) – g(x) = K***