EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} \lambda x + 2z = 0 \\ \lambda y - z = \lambda \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$, dependiente del parámetro real λ, se pide :

a) Determinar para qué valores de λ el sistema es: compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible (*1,3 puntos*).
b) Obtener las soluciones en los casos compatible determinado y compatible indeterminado (*2 puntos*).

Solución:
a) La matriz ampliada de este sistema es

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \lambda \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Tanto la matriz de coeficientes (A) como la ampliada A´ tienen como máximo rango 3; empezamos estudiando el rango de A.

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 3\lambda = \lambda^2 + \lambda$$

Veamos para que valores del parámetro el determinante es nulo, resolvemos la ecuación

$$\lambda^2 + \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda(\lambda+1) = 0 \quad \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -1 \end{array} \right.$$

Para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -1$ *hay un menor de orden 3 no nulo,*
luego rang(A) = rang(A´) = 3 = nº de incognitas
Sistema compatible determinado

Para $\lambda = 0$ *el menor de orden 3 de A es nulo, el rango de A será como máximo 2, estudiemos los rangos de A y A´*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiemos el siguiente menor de A $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ *luego rang(A)=2 y el rang(A´) será al menos 2.*

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

En esta matriz se observa que $F_1 = -2F_2$ *por lo que rang (A´) = 2*

luego rang(A) = rang(A´) = 2 < nº de incognitas
Sistema compatible indeterminado

Para $\lambda = -1$ *igual que en el caso anterior el menor de orden 3 de A es nulo. Estudiemos los rangos de A y A´.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiemos el siguiente menor de A $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ *luego rang(A)=2 y el rang(A´) será al menos 2.*

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

orlando el menor anterior con la 4ª columna y 3ª fila $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 3 = 2 \neq 0$ *luego rang(A´)=3*

luego rang(A)=2 y rang(A´)=3, es decir rang(A) $\neq$ *rang(A´)*
Sistema incompatible

En resumen, para $\lambda = -1$ *Sistema Incompatible,*
para $\lambda = 0$ *Sistema Compatible Indeterminado,*
para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -1$ *Sistema Compatible Determinado.*

b) Para $\lambda \neq 0$ *y* $\lambda \neq -1$ *Sistema Compatible Determinado.*

Lo resolvemos por Cramer, $|A|$ *ya lo calculamos en el apartado a)* $|A| = \lambda^2 + \lambda$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{6\lambda - 10\lambda}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{-4\lambda}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{-4\lambda}{\lambda(\lambda+1)} = \frac{-4}{\lambda+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 5\lambda}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{\lambda^2 + 3\lambda}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{\lambda(\lambda+3)}{\lambda(\lambda+1)} = \frac{\lambda+3}{\lambda+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{5\lambda^2 - 3\lambda^2}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{2\lambda^2}{\lambda(\lambda+1)} = \frac{2\lambda}{\lambda+1}$$

En los cálculo anteriores como $\lambda \neq 0$ *al final podemos simplificar por* λ

Para $\lambda \neq 0$ *y* $\lambda \neq -1$ *la solución del sistema es* $x = \dfrac{-4}{\lambda+1}$ $\quad y = \dfrac{\lambda+3}{\lambda+1}$ $\quad z = \dfrac{2\lambda}{\lambda+1}$

Para $\lambda = 0$ *Sistema Compatible Indeterminado.*

Para este valor de λ*, del menor de orden 2 no nulo obtenido en el apartado a) escogemos las ecuaciones e incógnitas principales, es decir, tomamos la 2ª y 3ª ecuación:*

$- z = 0$

$x + 3y + z = 5$

las incógnitas principales son z *e* y*, pasamos* x *al término independiente y el sistema a resolver es,*

$\begin{cases} -z = 0 \\ 3y + z = 5 - x \end{cases}$ *sustituyendo el valor de* z *en la 2ª ecuación* $3y + 0 = 5 - x$ $\quad y = \dfrac{5-x}{3}$

La solución del sistema será:

$$\textit{Solución} \quad \begin{cases} x = \mu \\ y = \dfrac{5-\mu}{5} \\ z = 0 \end{cases} \quad , \mu \in \Re$$