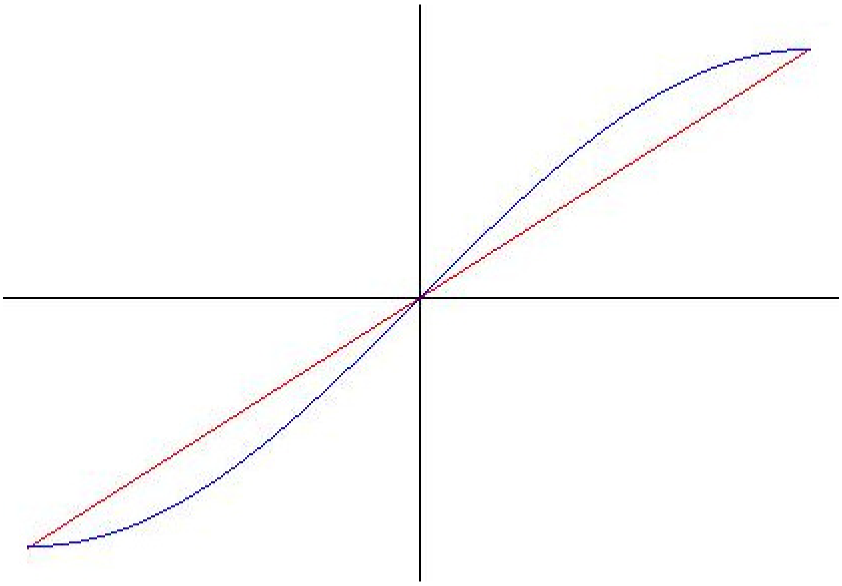
EJERCICIO A

PROBLEMA 2. a) Dibujar la recta de ecuación *y = (2/π) x* y la curva de ecuación *y = sen x* cuando $-\pi/2 \le x \le \pi/2$; obtener razonadamente por cálculo integral el área limitada entre la recta y la curva *(1,6 puntos).*
b) Calcular la integral del producto de las dos funciones consideradas en el apartado anterior, es decir,
$\int (2/\pi)\ x\ sen\ x \quad dx$, indicando los pasos realizados *(1,7 puntos).*

Solución:
a) Dibujamos las dos funciones mediante una tabla de valores

x	$y=\frac{2x}{\pi}$	$y = sen\ x$
$\frac{-\pi}{2}$	-1	-1
$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}=-0'7$
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=0'7$
$\frac{\pi}{2}$	1	1



Las dos funciones son continuas en el intervalo considerado, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, por lo tanto en el cálculo del área limitada entre ellas podemos emplear la regla de Barrow. Descomponemos el cálculo del área en dos trozos según que la recta esté por encima o por debajo de la curva y = sen x,

$$A=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0}\left(\frac{2x}{\pi}-sen\ x\right)dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(sen\ x-\frac{2x}{\pi}\right)dx=\left[\frac{x^2}{\pi}+\cos x\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{0}+\left[-\cos x-\frac{x^2}{\pi}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\left[0+\cos 0-\left(\frac{\left(\frac{-\pi}{2}\right)^2}{\pi}+\cos\frac{-\pi}{2}\right)\right]+\left[-\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\pi}-(-\cos 0-0)\right]=1-\frac{\pi}{4}+1-\frac{\pi}{4}=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)u.a.$$

b) Para resolver esta integral primero extraemos la constante fuera de la integral y ésta la resolvemos por partes,

$$\int\left(\frac{2}{\pi}\right)x\ sen\ x\ dx=\frac{2}{\pi}\int x\ sen\ x\ dx=(1)$$

$$\text{Calculamos}\quad \int x\ sen\ x\ dx=\left\{\begin{matrix} u=x & \to & du=dx \\ dv=sen\ x\ dx & \to & v=-\cos x\end{matrix}\right\}=-x\cos x-\int -\cos x\ dx=$$

$$=-x\cos x+\int\cos x\ dx=-x\cos x+sen\ x$$

Luego

$$(1)=\frac{2}{\pi}(-x\cos x+sen\ x+C)$$