EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Sean r y r' las rectas del espacio $\Re^3$, determinadas del modo siguiente:
r pasa por los puntos A = (3,6,7) y B = (7,8,3) y r' es la recta de intersección de los planos de ecuaciones: x – 4 y – z = - 10 y 3 x – 4 y + z = - 2. Se pide:
a) Calcular de cada una de las rectas r y r' una ecuación paramétrica y determinar la posición relativa de ambas (*1 punto*).
b) Calcular la distancia d entre las rectas r y r' *(1,3 puntos).*
c) Calcular el área del triángulo de vértices A, B y C, siendo C un punto cualquiera de la recta r' *(1 punto).*

Solución:
a) Ecuación paramétrica de r

De la recta r conocemos	$r:\begin{cases} Punto \quad A(3,6,7) \\ \vec{v}_r = \vec{AB} = (4,2,-4) \end{cases}$	*por lo que una ecuación paramétrica será*	$r:\begin{cases} x = 3+4\lambda \\ y = 6+2\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 7-4\lambda \end{cases}$

Una ecuación paramétrica de r´ la encontramos resolviendo el sistema de ecuaciones que la define,

$$r'\begin{cases} x-4y-z=-10 \\ 3x-4y+z=-2 \end{cases}$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1+3 = 4 \neq 0 \quad \to \quad x \text{ y } z$ *son incógnitas principales.*

Resolvemos el siguiente sistema,

$$\begin{cases} x-z=-10+4y \\ 3x+z=-2+4y \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -10+4y & -1 \\ -2+4y & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-10+4y-2+4y}{4} = \frac{-12+8y}{4} = -3+2y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -10+4y \\ 3 & -2+4y \end{vmatrix}}{4} = \frac{-2+4y+30-12y}{4} = \frac{28-8y}{4} = 7-2y$$

Una ecuación paramétrica de r' es $r':\begin{cases} x=-3+2\mu \\ y=\mu \qquad \mu \in \Re \\ z=7-2\mu \end{cases}$

Determinemos la posición relativa de las dos rectas. Las ecuaciones paramétricas obtenidas nos dan un punto y un vector director de cada una de ellas,

$r:\begin{cases} P_r(3,6,7) \\ \vec{v}_r(4,2,-4) \end{cases}$ $\quad r':\begin{cases} P_{r'}(-3,0,7) \\ \vec{v}_{r'}(2,1,-2) \end{cases}$ *observemos que* $\vec{v}_r = 2\,\vec{v}_{r'} \Rightarrow \vec{v}_r // \vec{v}_{r'}$

La posición relativa de las dos rectas la obtenemos estudiando los rangos de las siguientes matrices,

$$M = \begin{pmatrix} \vec{v}_r & \vec{v}_{r'} \end{pmatrix} \quad y \quad M' = \begin{pmatrix} \vec{v}_r & \vec{v}_{r'} & \vec{P_rP_{r'}} \end{pmatrix}$$

Como $\vec{v}_r // \vec{v}_{r'} \to rang(M) = 1$

$$M' = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3-3 \\ 2 & 1 & 0-6 \\ -4 & -2 & 7-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -6 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

La primera y segunda columna de M´ son proporcionales, luego rang (M´) ≤ 2. Consideramos el siguiente menor de orden 2 de M´

$$\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -24 + 12 = -12 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(M') = 2$$

$$Como \quad rang(M) = 1 \quad y \quad rang(M') = 2 \quad \Rightarrow \quad r \ y \ r' \quad son\ paralelas.$$

b) Como las dos rectas son paralelas, la distancia entre ellas es la distancia de un punto de una a la otra

$$d(r, r') = d(P_{r'}, r) = \frac{\left| \overrightarrow{P_r P_{r'}} \times \overrightarrow{v_r} \right|}{\left| \overrightarrow{v_r} \right|}$$

$$\overrightarrow{P_r P_{r'}} = (-6,-6,0)$$

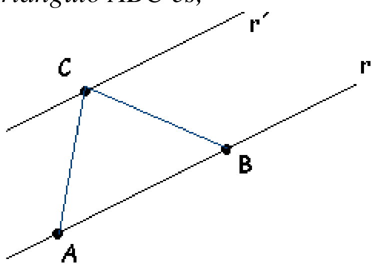
$$\overrightarrow{P_r P_{r'}} \times \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & -6 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 24\vec{i} - 24\vec{j} + 12\vec{k} = (24,-24,12)$$

$$\left| \overrightarrow{P_r P_{r'}} \times \overrightarrow{v_r} \right| = \sqrt{24^2 + (-24)^2 + 12^2} = 36$$

$$\left| \overrightarrow{v_r} \right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2} = 6$$

$$d(r, r') = \frac{36}{6} = 6\ u.\,l.$$

c) La representación gráfica aproximada del triángulo ABC es,



En el cálculo del área del triángulo interviene la base que será d(A,B) y la altura que será d(C,r).
Como las rectas r y r' son paralelas d(C,r) = d(r',r) = 6 (calculada en el apartado b)

$$d(A,B) = \sqrt{(7-3)^2 + (8-6)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$$

$$A_T = \frac{6\,.\,6}{2} = 18\ u.a.$$