EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + z = \lambda \\ \lambda x + 2y - 3 = 3\lambda \\ 2x + \lambda y - 2z = 6 \end{cases}$$

con λ parámetro real, se pide:

a) Determinar razonadamente para qué valores de λ es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible. *(1,3 puntos)*

b) Hallar el conjunto de las soluciones del sistema para el caso compatible determinado. *(1 punto)*

c) Hallar el conjunto de las soluciones del sistema para el caso compatible indeterminado. *(1 punto)*

Solución:

a) La matriz ampliada de este sistema es

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 2 & -1 & 3\lambda \\ 2 & \lambda & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Tanto la matriz de coeficientes (A) como la ampliada A´ tienen como rango máximo 3; empezamos estudiando el rango de A.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -2 \end{vmatrix} = -4 + \lambda^2 + 2 - 4 + \lambda - 2\lambda = \lambda^2 - \lambda - 6$$

Veamos para que valores del parámetro el determinante es nulo, resolvemos la ecuación

$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \lambda_2 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Para $\lambda \neq 3$ *y* $\lambda \neq -2$ *hay un menor de orden 3 no nulo,*
luego rang(A) = rang(A´) = 3 = nº de incognitas
Sistema compatible determinado

Para $\lambda = 3$ *el menor de orden 3 de A es nulo, el rango de A será como máximo 2, estudiemos los rangos de A y A´*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Estudiemos el siguiente menor de A $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$ *luego rang(A)=2 y el rang(A´) será al menos 2.*

$$A' = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

En esta matriz se observa que $F_2 - F_3 = F_1$ *por lo que rang (A´) = 2*

luego rang(A) = rang(A´) = 2 < nº de incognitas
Sistema compatible indeterminado

Para $\lambda = -2$ *igual que en el caso anterior el menor de orden 3 de A es nulo. Estudiemos los rangos de A y A´.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Estudiemos el siguiente menor de A $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0$ *luego rang(A)=2 y el rang(A´) será al menos 2.*

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -6 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \end{array}\right)$$ *orlando el menor anterior con la 4ª columna y 3ª fila* $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -6 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -6-8-12-4-12+12 = -30 \neq 0$$ *luego rang(A´)=3*

luego rang(A)=2 y rang(A´)=3, es decir rang(A) $\neq$ *rang(A´)*
Sistema incompatible

En resumen, para $\lambda = -2$ *Sistema Incompatible,*
para $\lambda = 3$ *Sistema Compatible Indeterminado,*
para $\lambda \neq 3$ *y* $\lambda \neq -2$ *Sistema Compatible Determinado.*

b) Para $\lambda \neq 3$ *y* $\lambda \neq -2$ *Sistema Compatible Determinado.*

Lo resolvemos por Cramer, $|A|$ *ya lo calculamos en el apartado a)* $|A| = \lambda^2 - \lambda - 6$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 3\lambda & 2 & -1 \\ 6 & \lambda & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4\lambda + 3\lambda^2 + 6 - 12 + \lambda^2 - 6\lambda}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{4\lambda^2 - 10\lambda - 6}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{(\lambda-3)(4\lambda+2)}{(\lambda-3)(\lambda+2)} = \frac{4\lambda+2}{\lambda+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 3\lambda & -1 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-6\lambda + 6\lambda - 2\lambda - 6\lambda + 6 + 2\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{2\lambda^2 - 8\lambda + 6}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{(\lambda-3)(2\lambda-2)}{(\lambda-3)(\lambda+2)} = \frac{2\lambda-2}{\lambda+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ \lambda & 2 & 3\lambda \\ 2 & \lambda & 6 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{12 + \lambda^3 - 6\lambda - 4\lambda - 3\lambda^2 + 6\lambda}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda+2)}{(\lambda-3)(\lambda+2)} = \lambda - 2$$

En los cálculo anteriores como $\lambda \neq 3$ *y* $\lambda \neq -2$ *podemos simplificar por* $\lambda - 3$ *y* $\lambda + 2$

Para $\lambda \neq 3$ *y* $\lambda \neq -2$ *la solución del sistema es* $x = \dfrac{4\lambda+2}{\lambda+2}$ $\quad y = \dfrac{2\lambda-2}{\lambda+2}$ $\quad z = \lambda - 2$

c) Para $\lambda = 3$ *Sistema Compatible Indeterminado.*
Para este valor de λ*, del menor de orden 2 no nulo obtenido en el apartado a) escogemos las ecuaciones e incógnitas principales, es decir, tomamos la 1ª y 2ª ecuación:*

$x - y + z = 3$
$3x + 2y - z = 9$

las incógnitas principales son x e y, pasamos z al término independiente y el sistema a resolver es,

$$\begin{cases} x - y = 3 - z \\ 3x + 2y = 9 + z \end{cases}$$ *el determinante de la matriz de coeficientes es 5, calculado en el apartado a), obtenemos las soluciones por Cramer,*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & -1 \\ 9+z & 2 \end{vmatrix}}{5} = \frac{6 - 2z + 9 + z}{5} = \frac{15 - z}{5} = 3 - \frac{z}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-z \\ 3 & 9+z \end{vmatrix}}{5} = \frac{9 + z - 9 + 3z}{5} = \frac{4z}{5}$$

Solución $$\begin{cases} x = 3 - \dfrac{\mu}{5} \\ y = \dfrac{4\mu}{5} \\ z = \mu \end{cases} \quad , \mu \in \Re$$