EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Dados los planos π_1 : x + y + z = -5 , π_2 : x – 3 y - z = 3 y la recta $r: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$,
se pide:

a) Determinar razonadamente la posición relativa de la recta r y la recta s intersección de los planos π_1 y π_2 . *(1,7 puntos)*

b) Obtener razonadamente la ecuación del plano que contiene a la recta s anterior y es paralelo a r. *(1,6 puntos)*

Solución:

a)

La recta s es de ecuación $\begin{cases} x+y+z=-5 \\ x-3y-z=3 \end{cases}$ *, calculemos su forma paramétrica. Considerando el menor formado por las incógnitas x z*

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0$ *resolvemos el sistema despejando la incógnita y.*

$\begin{cases} x+z=-5+y \\ x-z=3+3y \end{cases}$

Sumando ambas ecuaciones: $2x = -2+2y \rightarrow x = -1+y$

sustituyendo en la 1ª ecuación: – 1 + y + z = – 5 – y ; despejando z, z = – 4 – 2 y

La ecuación de la recta s será $\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-4-2\lambda \end{cases}$ $\lambda \in \Re$ *y de ella conocemos* $P_s(-1,0,-4)$ $\vec{v}_s(1,1,-2)$

la ecuación de la recta r es $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$ *y de ella conocemos* $P_r(2,1,0)$ $\vec{v}_r(2,3,2)$

Para estudiar la posición relativa de las rectas r y s hay que estudiar el rango de la matriz

$$M' = (\vec{v}_r \quad \vec{v}_s \quad P_r - P_s) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2-3 = -1 \neq 0 \rightarrow rang(M) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8-18+2-6+4-12 = 14-36 = -22 \neq 0 \rightarrow rang(M') = 3$$

Por lo tanto las rectas r y s se cruzan.

b) Ecuación del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r. El plano que buscamos lo podemos calcular de dos formas diferentes.

<u>1ª forma.</u>

De la recta s, como calculamos en el apartado anterior, conocemos un punto y un vector director;
el plano buscado, π, contiene a la recta s luego P_s y $\vec{v}_s$ serán un punto y un vector director de π
Como π debe ser paralelo a la recta r el otro vector director de π será el de r.

Del plano π conocemos $P_s(-1,0,-4)$ $\vec{v}_s(1,1,-2)$ $\vec{v}_r(2,3,2)$ *su ecuación será* $\begin{cases} x=-1+\lambda+2\mu \\ y=\lambda+3\mu \\ z=-4-2\lambda+2\mu \end{cases}$ $\lambda, \mu \in \Re$

Calculemos la ecuación general del plano,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x+1 \\ 1 & 3 & y \\ -2 & 2 & z+4 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por la última columna,

$$(x+1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (z+4)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Solución $\pi : 8x - 6y + z + 12 = 0$

$(x+1)\,(2+6) - y\,(2+4) + (z+4)\,(3-2) = 0$

$8x + 8 - 6y + z + 4 = 0$

$8x - 6y + z + 12 = 0$

2ª forma.

El haz de planos que contienen la recta s es

$(x + y + z + 5) + \lambda\,(x - 3y - z - 3) = 0 \qquad \lambda \in \Re$

Efectuando operaciones,

$(1+\lambda)x + (1-3\lambda)y + (1-\lambda)z + 5 - 3\lambda = 0 \qquad \lambda \in \Re$

El plano π que buscamos será uno de los anteriores.

El vector ortogonal al plano anterior es $\vec{v}_n(1+\lambda, 1-3\lambda, 1-\lambda) \qquad \lambda \in \Re$

Como el plano π debe ser paralelo a la recta r, se cumplirá que $\vec{v}_n \perp \vec{v}_r \quad \rightarrow \quad \vec{v}_n \,.\, \vec{v}_r = 0$

$(1+\lambda, 1-3\lambda, 1-\lambda)\,(2, 3, 2) = 0$

$2 + 2\lambda + 3 - 9\lambda + 2 - 2\lambda = 0$

$7 - 9\lambda = 0 \qquad \rightarrow \qquad \lambda = \dfrac{7}{9}$

La ecuación del plano buscado será:

$(x + y + z + 5) + \dfrac{7}{9}\,(x - 3y - z - 3) = 0$

$9\,(x + y + z + 5) + 7\,(x - 3y - z - 3) = 0$

$9x + 9y + 9z + 45 + 7x - 21y - 7z - 21 = 0$

Solución $\pi : 8x - 6y + z + 12 = 0$

$16x - 12y + 2z + 24 = 0$

$8x - 6y + z + 12 = 0$