EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Calcular los valores x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} 2AX - 3AY = B \\ AX - AY = C \end{cases}, \textit{donde} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}.$$

(3,3 puntos)

Solución:

Resolvemos el sistema planteado por reducción, multiplicamos la 2ª ecuación por (– 2)

$$\begin{cases} 2AX - 3AY = B \\ -2AX + 2AY = -2C \end{cases}$$

$$-AY = B - 2C \quad \rightarrow \quad AY = 2C - B \quad \rightarrow \quad (si\ existe\ A^{-1}) \quad Y = A^{-1}(2C - B)$$

multiplicamos la 2ª ecuación por (– 3)

$$\begin{cases} 2AX - 3AY = B \\ -3AX + 3AY = -3C \end{cases}$$

$$-AX = B - 3C \quad \rightarrow \quad AX = 3C - B \quad \rightarrow \quad (si\ existe\ A^{-1}) \quad X = A^{-1}(3C - B)$$

Veamos si existe A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0 \quad luego\ existe\ A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ij}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$luego \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculemos las matrices X e Y

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left[3\begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -33 & -90 \\ 19 & 53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -99+95 & -270+265 \\ -33+38 & -90+106 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left[2\begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -16 & -60 \\ 9 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48+45 & -180+175 \\ -16+18 & -60+70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$x_1 = -4 \quad x_2 = -5 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 16 \qquad y_1 = -3 \quad y_2 = -5 \quad y_3 = 2 \quad y_4 = 10$