EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Se considera el plano π : y + z – 12 m = 0 (m parámetro real) y la rectas

$$u:\begin{cases}x=1\\ y=z\end{cases},\quad v:\begin{cases}x=2\\ y=2z\end{cases},\quad w:\begin{cases}x=3\\ y=3z\end{cases}.$$

Sean A, B y C los puntos de intersección de π con u, v y w, respectivamente.

a) Calcular las coordenadas de A, B y C en función de m *(1,8 puntos)*

b) Hallar los valores de m para los que el área del triángulo ABC es 1 u.a. *(1,5 puntos)*

Solución:

a)

$$A:\pi\cap u \quad\to\begin{cases}y+z-12m=0\\ x=1\\ y=z\end{cases}\quad\begin{matrix}z+z-12m=0\\ \to\quad 2z=12m\\ z=6m\end{matrix}\quad\to\quad A(1,6m,6m)$$

$$B:\pi\cap v \quad\to\begin{cases}y+z-12m=0\\ x=2\\ y=2z\end{cases}\quad\begin{matrix}2z+z-12m=0\\ \to\quad 3z=12m\\ z=4m\end{matrix}\quad\to\quad B(2,8m,4m)$$

$$C:\pi\cap w \quad\to\begin{cases}y+z-12m=0\\ x=3\\ y=3z\end{cases}\quad\begin{matrix}3z+z-12m=0\\ \to\quad 4z=12m\\ z=3m\end{matrix}\quad\to\quad C(3,9m,3m)$$

b) El área del triángulo ABC se obtiene a partir de la fórmula

$$Área=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB}=(1,2m,-2m)\qquad \overrightarrow{AC}=(2,3m,-3m)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 1&2m&-2m\\ 2&3m&-3m\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}2m&-2m\\ 3m&-3m\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1&-2m\\ 2&-3m\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1&2m\\ 2&3m\end{vmatrix}=\vec{i}\,0-\vec{j}(-3m+4m)+\vec{k}(3m-4m)=$$

$$=(0,-m,-m)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{0^2+(-m)^2+(-m)^2}=\sqrt{2m^2}$$

$$Área=\frac{1}{2}\sqrt{2m^2}\quad\to\quad 1=\frac{1}{2}\sqrt{2m^2}\quad\to\quad 2=\sqrt{2m^2}\quad\to\quad 4=2m^2\quad\to\quad m^2=2\quad\to\quad m=\pm\sqrt{2}$$

Como hemos resuelto una ecuación irracional, $2=\sqrt{2m^2}$ *debemos comprobar las soluciones*

$m=\sqrt{2}\qquad 2=\sqrt{2\left(\sqrt{2}\right)^2}\quad\to\quad 2=\sqrt{4}$ *Sí. Solución válida*

$m=-\sqrt{2}\qquad 2=\sqrt{2\left(-\sqrt{2}\right)^2}\quad\to\quad 2=\sqrt{4}$ *Sí. Solución válida*

Solucíones: $m_1=\sqrt{2}\qquad m_2=-\sqrt{2}$