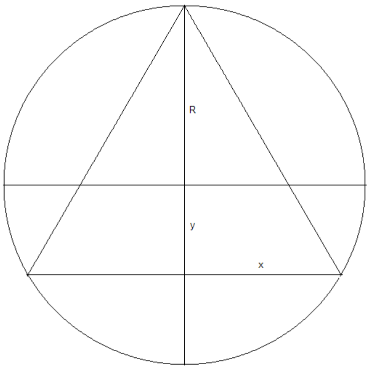
EJERCICIO A

PROBLEMA 4.1. Probar que el volumen de cualquier cono recto inscrito en una esfera es menor que el 30% del volumen de la misma *(3,3 puntos)*.

Solución:
Al inscribir un cono en una esfera, los volúmenes de ambos cuerpos son, llamando R al radio de la esfera,



$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi\, R^3$$
$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi\, x^2 (y+R)$$
$$siendo \quad x^2 + y^2 = R^2, \quad x, y > 0$$

despejando x^2, expresamos el volumen del cono en función de y, $x^2 = R^2 - y^2$, luego

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi\,(R^2 - y^2)\,(y+R) = \frac{1}{3}\pi\left(R^3 + R^2 y - R\, y^2 - y^3\right)$$

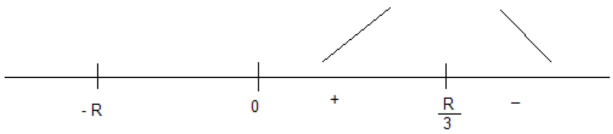
Busquemos el mayor cono recto que podemos inscribir en la esfera de radio R,

$$V' = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - 2R\, y - 3y^2\right)$$

$$V' = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - 2R\, y - 3y^2\right) = 0 \;\rightarrow\; R^2 - 2R\, y - 3y^2 = 0$$

$$3y^2 + 2R\, y - R^2 = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{-2R \pm \sqrt{(2R)^2 - 4\,.\,3\,(-R^2)}}{6} = \frac{-2R \pm \sqrt{4R^2 + 12R^2}}{6} = \frac{-2R \pm 4R}{6} = \left\langle \begin{array}{l} y_1 = \dfrac{2R}{6} = \dfrac{R}{3} \\ y_2 = \dfrac{-6R}{6} = -R \end{array}\right.$$

Puesto que los valores de y deben ser positivos, estudiamos el signo de V´en R^+,
como V´ es un polinomio de 2º grado con coeficiente de y^2 negativo, obtenemos



Para $y = R/3$ V alcanza un máximo relativo; por ser V creciente en el intervalo (0, R/3) y decreciente en (R/3,+∞) este máximo es absoluto. Es decir que el mayor cono recto que podemos inscribir en una esfera de radio R es aquel cuyo volumen es:

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2\right)\left(\frac{R}{3} + R\right) = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - \frac{R^2}{9}\right)\left(\frac{4R}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{9R^2 - R^2}{9}\right)\left(\frac{4R}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi\frac{8R^2}{9}\,\frac{4R}{3} = \frac{32}{81}\pi\, R^3$$

Comprobemos que con el mayor cono recto inscrito en la esfera se cumple la condición del problema,

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi\, R^3$$
$$V_{cono} = \frac{32}{81}\pi\, R^3$$
$$¿V_{cono} < \frac{30}{100} V_{esfera}?$$
$$\frac{32}{81} < \frac{30}{100}\frac{4}{3} \;\rightarrow\; \frac{32}{81} < \frac{10}{25} \;\rightarrow\; 0'395 < 0'4 \quad Sí$$

Como el volumen del mayor cono recto que podemos inscribir en la esfera cumple la condición del problema, cualquier cono recto inscrito en una esfera la cumple.