EJERCICIO B

PROBLEMA 1. El sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+\alpha\, y+\alpha^2\, z=1 \\ x+\alpha\, y+\alpha\, z=\alpha \\ x+\alpha^2\, y+\alpha^2\, z=\alpha^2 \end{cases}$ depende del parámetro real α.

Discutir para que valores de α es incompatible, compatible determinado y compatible indeterminado *(2 puntos),* y resolverlo en las casos compatibles *(1,3 puntos).*

Solución:

a) La matriz ampliada de este sistema es

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

Tanto la matriz de coeficientes (A) como la ampliada A´ tienen como rango máximo 3; empezamos estudiando el rango de A.

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix} = \alpha^3+\alpha^4+\alpha^2-\alpha^3-\alpha^3-\alpha^3=\alpha^4-2\alpha^3+\alpha^2$$

Veamos para que valores del parámetro el determinante es nulo, resolvemos la ecuación

$$\alpha^4-2\alpha^3+\alpha^2=0 \quad\rightarrow\quad \alpha^2\left(\alpha^2-2\,\alpha+1\right)=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} \alpha^2=0 \quad\rightarrow\quad \alpha=0 \\ \alpha^2-2\,\alpha+1=0 \quad\rightarrow\quad (\alpha-1)^2=0 \quad\rightarrow\quad \alpha-1=0 \quad\rightarrow\quad \alpha=1 \end{cases}$$

Para $\alpha\neq 0$ *y* $\alpha\neq 1$ *hay un menor de orden 3 no nulo,*
luego rang(A) = rang(A´) = 3 = nº de incognitas
Sistema compatible determinado.

Para $\alpha=0$ *el menor de orden 3 de A es nulo, el rango de A será como máximo 2, estudiemos los rangos de A y A´*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ *Como las tres filas de A son iguales, rang(A)=1*

$$A'=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ *Consideramos el menor* $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0-1=-1\neq 0$ *por lo que rang (A´) = 2*

luego rang(A) ≠ rang(A´) Sistema incompatible.

Para $\alpha=1$ *igual que en el caso anterior el menor de orden 3 de A es nulo. Estudiemos los rangos de A y A´.*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ *Como las tres filas de A son iguales, rang(A)=1*

$$A'=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ *Como las tres filas de A´ son iguales, rang(A´)=1*

luego rang(A)= rang(A´)=1 < nº de incognitas, Sistema compatible indeterminado

En resumen, *para* $\alpha=0$ *Sistema Incompatible,*
para $\alpha=1$ *Sistema Compatible Indeterminado,*
para $\alpha\neq 0$ *y* $\alpha\neq 1$ *Sistema Compatible Determinado.*

Resolución

Para $\alpha \neq 0 \ y \ \alpha \neq 1$ *Sistema Compatible Determinado.*

Lo resolvemos por Cramer, $|A|$ *ya lo calculamos en el apartado a)* $|A| = \alpha^4 - 2\alpha^3 + \alpha^2 = \alpha^2(\alpha-1)^2$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\alpha^3\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = \frac{0}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\alpha\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{vmatrix}}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha\left(\alpha^2+\alpha^3+1-\alpha^2-\alpha^2-\alpha\right)}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha\left(\alpha^3-\alpha^2-\alpha+1\right)}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha(\alpha-1)^2(\alpha+1)}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha+1}{\alpha}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & |0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \alpha^3-\alpha^2-\alpha+1 = (\alpha-1)(\alpha^2-1) = (\alpha-1)(\alpha-1)(\alpha+1) = (\alpha-1)^2(\alpha+1)$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\alpha\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{vmatrix}}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha\left(\alpha^2+\alpha+\alpha-1-\alpha^2-\alpha^2\right)}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha\left(-\alpha^2+2\,\alpha-1\right)}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = \frac{-\alpha(\alpha-1)^2}{\alpha^2(\alpha-1)^2} = \frac{-1}{\alpha}$$

En los cálculos anteriores como $\alpha \neq 0 \ y \ \alpha \neq 1$ *podemos simplificar por* $\alpha \ y \ \alpha - 1$

Para $\alpha \neq 0 \ y \ \alpha \neq 1$ *la solución del sistema es* $x = 0$ $\quad y = \dfrac{\alpha+1}{\alpha}$ $\quad z = \dfrac{-1}{\alpha}$

Para $\alpha = 1$ *Sistema Compatible Indeterminado.*

Para este valor de α *, el sistema queda reducido a la ecuación:*

$x + y + z = 1$

Podemos despejar cualquiera de las incógnitas, despejando x quedará $x = 1 - y - z$

Solución $\begin{cases} x = 1-\lambda-\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \Re$