EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Hallar las constantes reales a y b para que $f(x)=\begin{cases} x\ln x+a & si \quad x>0 \\ b & si \quad x=0 \\ \dfrac{sen\,\pi x}{x} & si \quad x<0 \end{cases}$

sea una función continua para todo valor real x (*3,3 puntos*).

Solución:

Para x < 0 f(x) está definida como $\dfrac{sen\,\pi x}{x}$ *que es continua ya que el denominador no se anula.*

Para x > 0 f(x) está definida como $x\ln x+a$ *que es continua ya que ln x es continua para x>0.*

Veamos si es continua para x = 0. Deben cumplirse tres condiciones,

1) $\exists\, f(0)$
2) $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$
3) $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Veamos cada una de ellas,

1) f(0) = b, por definición de f(x); luego existe f(0)

2) Para calcular este límite como la función tiene definiciones distintas a la izquierda y a la derecha del 0, debemos estudiar los límites laterales,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{sen\,\pi x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{(m)}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{\pi\cos\pi x}{1}=\pi$$

(m) como las funciones sen πx y x (numerador y denominador del límite a calcular) son derivables para todo valor real, en particular lo son en intervalos (x, 0), resolvemos la indeterminación aplicando la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x\ln x+a)=(0\,(-\infty)+a)$$

En primer lugar resolvemos la indeterminación obtenida transformándola en un cociente en el que podamos aplicar la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=(0\,(-\infty))=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{(n)}{=}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to 0^+} x=0$$

Como las funciones $\ln x$ *y* $\dfrac{1}{x}$ *son derivables en intervalos (0, x) podemos aplicar L´Hôpital.*

Por lo que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x+a)=0+a=a$

Finalmente $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *cuando* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \;\to\; a=\pi$

3) El valor de la función y el del límite deben coincidir, es decir, b = a = π

Para que f(x) sea continua para todo valor real de x $a=b=\pi$