EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones con incógnitas x , y, z, $\begin{cases} x+2y-3z=\alpha \\ 2x+6y-11z=2 \\ x-2y+7z=1 \end{cases}$

se pide:

a) Determinar razonadamente el valor de α para el cual el sistema es compatible *(1,2 puntos).*

b) Para ese valor obtenido en a) de α, calcular el conjunto de soluciones del sistema *(1,3 puntos).*

c) Explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las tres ecuaciones del sistema, en función de los valores de α *(0,8 puntos).*

Solución:

a)

La matriz ampliada del sistema es

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 2 & 6 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

Estudiemos el rango de la matriz de coeficientes, M. En la matriz M tenemos el siguiente menor de orden 2, 1ª y 2ª filas con 1º y 2ª columnas,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6-4 = 2 \neq 0 \quad , luego \quad ran(M) \geq 2$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 42+12-22+18-22-28 = 72-72 = 0$$

Por lo tanto ran(M) = 2

Estudiemos el rango de la matriz ampliada, M'. Orlamos el menor de orden 2 no nulo de M con la 4ª columna y 3ª fila de M',

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6-4\alpha+4-6\alpha+4-4 = 10-10\alpha$$

$$10-10\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 1$$

$$Luego \quad \begin{cases} Para \quad \alpha = 1 & ran(M') = 2 \\ Para \quad \alpha \neq 1 & ran(M') = 3 \end{cases}$$

El sistema será compatible cuando ran(M) = ran(M'), es decir, para α = 1.

b)

Resolvamos el sistema anterior para α = 1.

Según obtuvimos en el anterior apartado el menor no nulo de orden 2 de M era el formado por la 1ª y 2ª fila y la 1ª y 2ª columna de M. Luego el sistema que debemos resolver estará formado por las dos primeras ecuaciones y las incógnitas principales serán x e y. Es decir, el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 2x+6y-11z=2 \end{cases} \quad x \;\; e \;\; y \;\; incóg.\ princ. \;\; \rightarrow \;\; \begin{cases} x+2y=1+3z \\ 2x+6y=2+11z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+3z & 2 \\ 2+11z & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{6+18z-4-2z}{2} = \frac{2-4z}{2} = 1-2z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+3z \\ 2 & 2+11z \end{vmatrix}}{2} = \frac{2+11z-2-6z}{2} = \frac{5z}{2}$$

Para α = 1 el conjunto de soluciones es:

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = \dfrac{5}{2}\lambda \qquad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$

c)

Para $\alpha \neq 1$

ran(M) = 2 y ran(M')=3, sistema incompatible, los tres planos no tienen un corte común.

Considerando los planos dos a dos,

De lo estudiado en el apartado a), el primer y segundo planos no son paralelos porque

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0$$

Veamos el 2º y 3er *planos,*

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 6 = -10 \neq 0$$

no son paralelos.

Con el 1er *y 3*^{er} *planos sería,*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0$$

no son paralelos.

Luego los tres planos se cortan dos a dos pero no tienen ningún corte común.

Para $\alpha = 1$

ran(M) = 2 y ran(M')=2, como hay tres incógnitas: sistema compatible indeterminado.

La solución de este sistema la hemos obtenido en el apartado b). Esta solución corresponde a la ecuación de una recta.

En este caso los tres planos se cortan en una recta.