EJERCICIO A

PROBLEMA 2. En el espacio se consideran:
La recta r intersección de dos planos de ecuaciones implícitas: x + y – z = 5 y 2 x + y – 2 z = 2 .
Y la recta s que pasa por los puntos P = (3, 10, 5) y Q = (5, 12, 6). Se pide:

a) Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta r *(0,6 puntos)* y de la recta s *(0,4 puntos).*

b) Calcular el punto H intersección de r y s *(0,6 puntos)* y el ángulo α que determinan r y s *(0,4 puntos).*

c) Calcular los puntos M y N de la recta r para los que el área de cada uno de los triángulos de vértices PQM y PQN es 3 unidades de área *(1,3 puntos).*

Solución:
Datos del problema:

$$r:\begin{cases} x+y-z=5 \\ 2x+y-2z=2 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} P(3,10,5) \\ Q(5,12,6) \end{cases}$$

a) Ecuaciones paramétricas de r y s.
De r, resolver el sistema que la define,

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-2=-1\neq 0$ *x e y incógnitas principales.*

El sistema a resolver será:

$$\begin{cases} x+y=5+z \\ 2x+y=2+2z \end{cases} \quad \text{Resolviéndolo por Cramer} \quad x=\frac{\begin{vmatrix} 5+z & 1 \\ 2+2z & 1 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{5+z-2-2z}{-1}=\frac{3-z}{-1}=-3+z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5+z \\ 2 & 2+2z \end{vmatrix}}{-1}=\frac{2+2z-10-2z}{-1}=8$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=8 \\ z=\lambda \end{cases} \qquad \lambda\in\Re$$

De s, a partir de los dos puntos conocidos calculamos su vector director,

$$s:\begin{cases} P(3,10,5) \\ \vec{v}=\vec{PQ}=(2,2,1) \end{cases} \qquad \text{luego} \quad s:\begin{cases} x=3+2\mu \\ y=10+2\mu \\ z=5+\mu \end{cases} \quad \mu\in\Re$$

b)
Corte entre r y s (H)
Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las rectas r y s obtenidas en el apartado anterior,

$$\begin{cases} -3+\lambda=3+2\mu \\ 8=10+2\mu \\ \lambda=5+\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda-2\mu=6 \\ 2\mu=-2 \\ \lambda-\mu=5 \end{cases} \quad \text{de la 2ª ecuación } \mu=-1$$

sustituyendo el valor de μ en las otras dos ecuaciones,

$$\begin{cases} \lambda-2(-1)=6 \\ \lambda-(-1)=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda+2=6 \\ \lambda+1=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda=4 \\ \lambda=4 \end{cases}$$

Como obtenemos el mismo valor de λ en las dos ecuaciones, el sistema tiene solución. Sustituyendo el valor de λ en la recta r o el valor de μ en la recta s obtendremos el punto H buscado.
Para λ = 4, H (– 3 + 4, 8 , 4) = (1, 8, 4)

El ángulo que forman las rectas r y s es el ángulo que forman sus vectores directores,

$\vec{v}_r(1,0,1) \quad y \quad \vec{v}_s(2,2,1)$

$$\cos\left(\hat{r,s}\right) = \frac{\left|\vec{v}_r\ \vec{v}_s\right|}{\left|\vec{v}_r\right|\left|\vec{v}_s\right|} = \frac{\left|(1,0,1)\ (2,2,1)\right|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\ \sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{\left|2+1\right|}{\sqrt{2}\ \sqrt{9}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Luego $\left(\hat{r,s}\right) = 45^o$. *Por lo que* $\alpha = 45^o$ *o* $\alpha = \frac{\pi}{4}\ rds$

c)

Como los puntos M y N pertenecen a la recta r sabemos que serán de la forma
$(-3+\lambda, 8, \lambda) \quad \lambda \in \Re$
El triángulo PQM está determinado por los puntos P, Q y M; calculamos su área a partir de los vectores que determinan el triángulo, por ejemplo, $\vec{PQ}$ *y* $\vec{PM}$.

$$T: triángulo \quad PQM \begin{cases} P(3,10,5) \\ Q(5,12,6) \\ M(-3+\lambda,8,\lambda) \end{cases} \qquad \vec{PQ}(2,2,1) \quad y \quad \vec{PM}(-6+\lambda,-2,\lambda-5)$$

$$A_T = \frac{\left|\vec{PQ}\times\vec{PM}\right|}{2}$$

$$\vec{PQ}\times\vec{PM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ -6+\lambda & -2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & \lambda-5 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6+\lambda & \lambda-5 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -6+\lambda & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(2\lambda-10+2, -\left[2\lambda-10-(-\lambda+6)\right], -4+12-2\lambda\right) = (2\lambda-8, -\lambda+4, -2\lambda+8)$$

$$\left|\vec{PQ}\times\vec{PM}\right| = \sqrt{(2\lambda-8)^2+(-\lambda+4)^2+(-2\lambda+8)^2} = \sqrt{4\lambda^2-32\lambda+64+\lambda^2-8\lambda+16+4\lambda^2-32\lambda+64} =$$

$$= \sqrt{9\lambda^2-72\lambda+144} = \sqrt{9(\lambda^2-8\lambda+16)} = \sqrt{9(\lambda-4)^2} = 3\left|\lambda-4\right|$$

$$A_T = \frac{3\left|\lambda-4\right|}{2}$$

$$A_T = 3 \quad \rightarrow \quad \frac{3\left|\lambda-4\right|}{2} = 3 \quad \rightarrow \quad \left|\lambda-4\right| = 2 \quad \left\langle \begin{array}{l} \lambda-4=2 \quad \rightarrow \quad \lambda=6 \\ \lambda-4=-2 \quad \rightarrow \quad \lambda=2 \end{array} \right.$$

Obtenemos dos valores de λ, a partir de ellos obtendremos los dos puntos pedidos.
Para λ = 6 M(3, 8, 6)
Para λ = 2 N(-1, 8, 2)