EJERCICIO A

PROBLEMA 3.

a) Dibujar razonadamente la gráfica de la función $g(x) = x^2 - 4$, cuando $-1 \le x \le 4$ *(1,1 puntos)*.

b) Obtener razonadamente los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = \left| x^2 - 4 \right|$ en el intervalo $[-1, 4]$ *(1,1 puntos)*.

c) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$ y las rectas $x = -1$, $x = 4$ e $y = 0$ *(1,1 puntos)*.

Solución:

a)

Como la función g(x) esta definida como un trozo de parábola, haremos los cálculos (puntos de corte con los ejes, vértice) para representar la parábola y calcularemos los puntos de inicio y fin de g(x).

$y = x^2 - 4$

Puntos de corte con los ejes coordenados:

eje OY, $x = 0$, $y = 0^2 - 4 = -4$, $(0 , -4)$

eje OX, $y = 0$ $x^2 - 4 = 0$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$, $(2 , 0)$ *y* $(-2 , 0)$

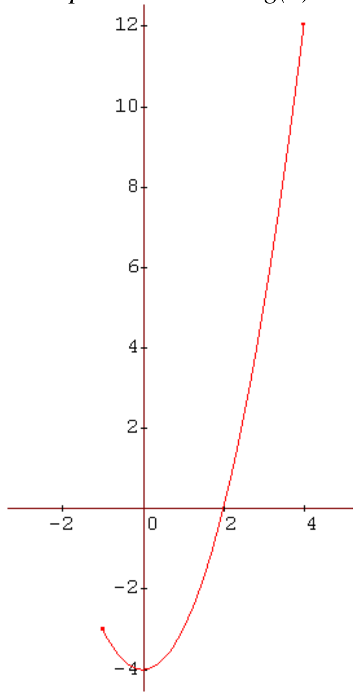
$$\text{Vértice} \quad x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = 0 \quad , \quad (0 , -4)$$

Calculemos el inicio y fin de g(x)

inicio $x = -1$, $y = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$; $(-1, -3)$

fin $x = 4$, $y = 4^2 - 4 = 16 - 4 = 12$; $(4, 12)$

La representación de g(x) será:



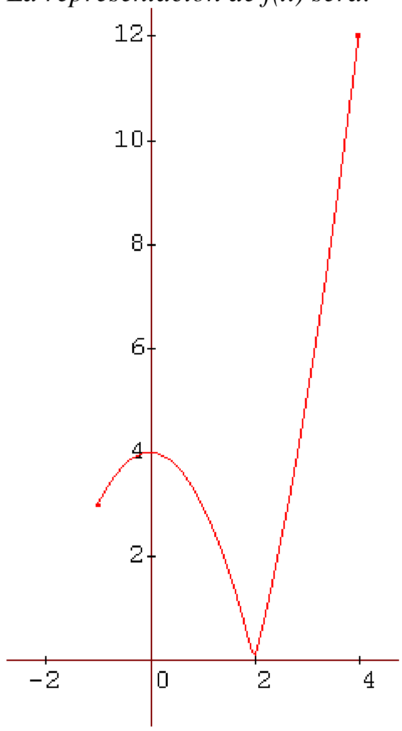
b)

$f(x) = \left| x^2 - 4 \right|$ *en el intervalo [-1, 4]*

Por su definición $f(x) = \left| g(x) \right|$

Por lo que podemos dibujar la función f(x) a partir de la representación de g(x) trazando la parte negativa de g(x) simétrica respecto del eje OX.

La representación de f(x) será:



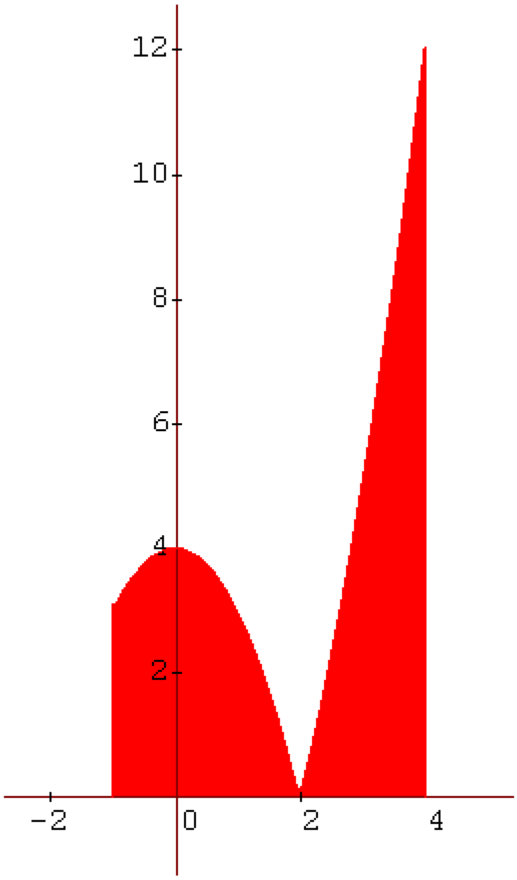
Los valores máximo y mínimo absoluto de f(x) podemos obtenerlos directamente de la gráfica,

el máximo absoluto se alcanza en el punto (4 , 12)

el mínimo absoluto se alcanza en el punto (2 , 0) *c)*

La definición de f(x) es $f(x)=\begin{cases} -x^2+4 & , \quad -1\le x<2 \\ x^2-4 & , \quad 2\le x\le 4 \end{cases}$

El área a calcular será



La obtendremos mediante el siguiente cálculo integral,

$$A=\int_{-1}^{2}\left(-x^2+4\right)dx+\int_{2}^{4}\left(x^2-4\right)dx=\left[\frac{-x^3}{3}+4x\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{2}^{4}=$$

$$=\left[\left(\frac{-8}{3}+8\right)-\left(\frac{1}{3}-4\right)\right]+\left[\left(\frac{64}{3}-16\right)-\left(\frac{8}{3}-8\right)\right]=$$

$$=\frac{-8}{3}+8-\frac{1}{3}+4+\frac{64}{3}-16-\frac{8}{3}+8=\frac{47}{3}+4=\frac{47+12}{3}=\frac{59}{3}$$

El área del recinto pedido mide $\frac{59}{3}$ *u. a.*