EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&-1&-1\\2&4&3\end{pmatrix}$ y $T=\begin{pmatrix}2&4&1\\-1&-3&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$ se pide

a) Probar que la matriz T tiene matriz inversa, T^{-1}, y calcular dicha matriz inversa T^{-1} *(1,3 puntos).*
b) Dada la ecuación con matriz incógnita B, $A = T^{-1}\,B\,T$, calcular el determinante de B *(0,8 puntos).*
c) Obtener los elementos de la matriz B considerada en el apartado b) *(1,2 puntos).*

Solución:

a) La matriz T que es 3x3 tendrá inversa si su determinante es distinto de cero.

$$|T|=\begin{vmatrix}2&4&1\\-1&-3&-1\\1&2&1\end{vmatrix}\overset{F_2+F_3}{=}\begin{vmatrix}2&4&1\\0&-1&0\\1&2&1\end{vmatrix}=-2+1=-1\neq 0$$

Por lo que existe T^{-1}. Calculémosla.

$$T=\begin{pmatrix}2&4&1\\-1&-3&-1\\1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{A_{ij}}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-3&-1\\2&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-1&-1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-1&-3\\1&2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}4&1\\2&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&4\\1&2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}4&1\\-3&-1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&1\\-1&-1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&4\\-1&-3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&1&0\\-1&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{A_{ji}}\begin{pmatrix}-1&2&-1\\0&1&-1\\1&0&-2\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\alpha_{ij}}\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\0&1&1\\1&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\text{Luego}\quad T^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\0&1&1\\1&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}$$

b) $A = T^{-1}\,B\,T$, ¿$|B|$?

Por las propiedades de los determinantes,

$$|A|=|T^{-1}B\,T|=|T^{-1}|\,|B|\,|T|=\frac{1}{|T|}\,|B|\,|T|=|B|$$

$$\text{Luego}\quad |B|=|A|=\begin{vmatrix}2&2&1\\-1&-1&-1\\2&4&3\end{vmatrix}\underset{C_3-C_1}{\overset{C_2-C_1}{=}}\begin{vmatrix}2&0&-1\\-1&0&0\\2&2&1\end{vmatrix}=-(-1)\begin{vmatrix}0&-1\\2&1\end{vmatrix}=2$$

c) $A = T^{-1}\,B\,T$, ¿B?

Para obtener la expresión de la matriz B multiplicamos la igualdad dada de la siguiente forma: T por la izquierda y T^{-1} por la derecha,

$T\ A\ T^{-1} = T\ \ T^{-1}\,B\,T\ \ T^{-1}$

$T\ A\ T^{-1} = I\ B\ I$

$T\ A\ T^{-1} = B$, calculamos la matriz B efectuando el cálculo matricial que la define.

$$B=\begin{pmatrix}2&4&1\\-1&-3&-1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&-1&-1\\2&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2.2-4.1+1.2 & 2.2-4-1+1.4 & 2.1-4.1+1.3\\-1.2+3.1-1.2 & -1.2+3.1-1.4 & -1.1+3.1-1.3\\1.2-2.1+1.2 & 1.2-2.1+1.4 & 1.1-2.1+1.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&4&1\\-1&-3&-1\\2&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$