EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Dados los puntos A = (4, -4, 9); B = (2, 0, 5); C = (4, 2, 6); L = (1, 1, 4); M = (0, 2, 3); y N = (3, 0, 5), se pide:

a) Calcular la distancia d del punto C al punto medio del segmento de extremos A, B *(0,5 puntos)* y el área S del triángulo de vértices A, B, C *(1 punto)*.

b) Calcular las ecuaciones implícitas del plano π que pasa por los puntos A, B, C *(0,4 puntos)* y del plano π' que pasa por los puntos L, M, N *(1 punto)*.

c) Calcular la ecuación paramétrica de la recta r intersección de los planos π y π' *(0,6 puntos)* y el ángulo α que determinan los planos π y π' *(0,4 puntos)*

Solución:

a)

$$Sea \quad d = d\left(C, PM_{\overline{AB}}\right)$$

$$C = (4,2,6)$$

$$PM_{\overline{AB}} \begin{cases} A(4,-4,9) \\ B(2,0,5) \end{cases} \quad PM_{\overline{AB}}(3,-2,7)$$

$$d = d\big((4,2,6),(3,-2,7)\big) = \sqrt{(4-3)^2+(2+2)^2+(6-7)^2} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\ u.l.$$

$$Sea\ A_S\ el\ área\ del\ triángulo\ S.$$

$$A_S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB} = (2,0,5)-(4,-4,9) = (-2,4,-4) \qquad \overrightarrow{AC} = (4,2,6)-(4,-4,9) = (0,6,-3)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = (12,6,-12)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{12^2+6^2+(-12)^2} = \sqrt{144+36+144} = \sqrt{324} = 18$$

$$A_S = \frac{1}{2}18 = 9\ u.a.$$

b)

$$Plano\ \pi\ pasa\ por\ A,\ B\ y\ C;\ sus\ vectores\ directores\ pueden\ ser \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2,4,-4) \\ \overrightarrow{AC} = (0,6,-3) \end{cases}$$

$$los\ vectores\ directores\ de\ \pi \begin{cases} \vec{u}(1,-2,2) \\ \vec{v}(0,2,-1) \end{cases}$$

La ecuación implícita del plano π la obtenemos,

$$\begin{vmatrix} x-4 & 1 & 0 \\ y+4 & -2 & 2 \\ z-9 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-4)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (y-4)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (z-9)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-4)(-2) - (y-4)(-1) + (z-9)2 = 0$$

$$-2x + 8 + y + 4 + 2z - 18 = 0$$

$$-2x + y + 2z - 6 = 0$$

La ecuación implícita del plano π es $-2x + y + 2z - 6 = 0$

$$\text{Plano } \pi' \text{ pasa por } L, M \text{ y } N; \text{sus vectores directores pueden ser} \begin{cases} \overrightarrow{ML} = (1,-1,1) \\ \overrightarrow{MN} = (3,-2,2) \end{cases}$$

La ecuación implícita del plano π' la obtenemos,

$$\begin{vmatrix} x-0 & 1 & 3 \\ y-2 & -1 & -2 \\ z-3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$x\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(0) - (y-2)(-1) + (z-3)1 = 0$$

$$y - 4 + z - 3 = 0$$

$$y + z - 5 = 0$$

La ecuación implícita del plano π' es $y + z - 5 = 0$

c)

$$r : \pi \cap \pi'$$

$$r : \begin{cases} -2x + y + 2z - 6 = 0 \\ y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Como } \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

x e y serán las incógnitas principales. El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} -2x + y = 6 - 2z \\ y = 5 - z \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación: $-2x + 5 - z = 6 - 2z$; $-2x = 1 - z$;

$$x = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}z$$

La ecuación paramétrica de la recta r será $\begin{cases} x = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{1}{2}\lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

Para calcular el ángulo que forman los planos π y π' obtenemos sus vectores normales,

$\vec{n}_{\pi}(-2,1,2) \quad y \quad \vec{n}_{\pi'}(0,1,1)$

$$\cos\left(\widehat{\vec{n}_{\pi},\vec{n}_{\pi'}}\right) = \frac{|(-2,1,2)\,(0,1,1)|}{\sqrt{4+1+4}\,\sqrt{1+1}} = \frac{|1+2|}{\sqrt{9}\sqrt{2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\widehat{\vec{n}_{\pi},\vec{n}_{\pi'}}\right) = 45º \quad \Rightarrow \quad \left(\widehat{\pi,\pi'}\right) = 90º - 45º = 45º$$

Solución $\left(\widehat{\pi,\pi'}\right) = \frac{\pi}{4} rds \quad o \quad 45º$