EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Dada la función f(x) = ln x en el intervalo cerrado [1 , e], siendo e = 2,718281…:

a) Razonar que existe un punto P de la gráfica y = ln x en el que la recta tangente a ella es paralela a la recta que pasa por los puntos A = (1, 0) y B = (e, 1) *(1 punto).*

b) Obtener el punto P considerado en a) *(1,8 punto).*

c) Calcular la pendiente de la recta tangente a y = ln x en ese punto P *(0,5 puntos).*

Solución:

a) f(x) = Ln x , x ∈ [1 , e]

Calculemos los valores de la función f(x) en los extremos del intervalo de definición,

f(1) = Ln 1 = 0 , luego el punto A(1,0) es de la gráfica de y = Ln x

f(e) = Ln e = 1 , luego el punto B(e,1) " " " " " "

Veamos si f(x) verifica las condiciones del Teorema del Valor Medio en el intervalo [1,e]

f(x) es continua en [1,e] por ser f(x) continua en (0,+∞)

f(x) es derivable en (1,e) por la misma razón que antes

como f(x) verifica las condiciones del TVM concluimos que

$$\exists\, c \in (1,e)\ /\ f'(c) = \frac{f(e)-f(1)}{e-1} = \frac{1-0}{e-1} = \frac{1}{e-1}$$

La recta que pasa por los puntos A y B tiene de pendiente $\frac{1-0}{e-1} = \frac{1}{e-1}$

Por lo tanto en el punto de abcisa c, valor obtenido en el TVM, la recta tangente a f(x) cuya pendiente es f'(c), es paralela a la recta que pasa por A y B (puesto que tienen la misma pendiente)

Solución: el punto P de la gráfica buscado es el (c , Ln c)

b)

$$\text{Como} \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad \to \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{e-1} \quad \to \quad c = e-1$$

El punto P será (e – 1 , Ln (e – 1))

c)

La pendiente de la recta tangente a y = Ln x en el punto P será, según lo obtenido en los apartados anteriores, $\frac{1}{e-1}$