Problema 1.2. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+\alpha\, y+z=9 \\ 3x+5y+z=9 \\ \alpha\, x+y+z=9 \end{cases}$, se pide:

a) Probar que es siempre compatible, obteniendo los valores de α para los que es indeterminado. *(2 puntos).*

b) Resolver el sistema anterior para $\alpha = 7$. *(1,3 puntos).*

Solución:

a)

Llamando A a la matriz de coeficientes del sistema y A' a la matriz ampliada,

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ \alpha & 1 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

A es una matriz 3x3, luego el máximo rango de A será 3
A' es una matriz 3x4, luego su máximo rango será 3

Estudiemos el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5+3+\alpha^2-5\alpha-1-3\alpha = \alpha^2-8\alpha+7$$

$$\alpha^2-8\alpha+7=0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{8\pm\sqrt{8^2-4.1.7}}{2.1} = \frac{8\pm\sqrt{64-28}}{2} = \frac{8\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{8\pm 6}{2} = \begin{cases} \dfrac{8+6}{2}=7 \\ \dfrac{8-6}{2}=1 \end{cases}$$

$$Para \quad \alpha \neq 1 \quad y \quad \alpha \neq 7, \quad ran(A)=3=ran(A')=n^{o}\ de\ incógnitas \quad \Rightarrow \quad S.C.D$$

$Para \quad \alpha = 1$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

En la matriz A la 1ª y 3ª filas son iguales, luego el máximo rango de A será 2,

$$en \quad A \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5-3=2\neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A)=2$$

en A', orlando el menor anterior, no nulo, con 3ª fila y 4ª columna,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad \left(1^{a}\ y\ 2^{a}\ filas\ iguales\right), \quad luego \quad ran(A')=2$$

ran(A) = ran(A') = 2 < nº incognitas, Sistema Compatible Indeterminado

$Para \quad \alpha = 7$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ 7 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

$$en \quad A' \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5-21=-16\neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A)=2$$

en A', orlando el menor anterior, no nulo, con 3ª fila y 4ª columna,

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 9 \\ 7 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9(5+3+49-35-1-21) = 9(57-57) = 0, \quad luego \quad ran(A') = 2$$

ran(A) = ran(A') = 2 < nº incógnitas, Sistema Compatible Indeterminado

Por lo tanto, para cualquier valor de α el sistema es siempre compatible.
El sistema es compatible indeterminado para $\alpha = 1$ y $\alpha = 7$.

b) Para $\alpha = 7$
El sistema a resolver es,

$$\begin{cases} x + 7\ y + z = 9 \\ 3x + 5y + z = 9 \\ 7\ x + y + z = 9 \end{cases}$$

Este sistema es compatible indeterminado. Del estudio realizado en al apartado anterior, sabemos que el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + 7\ y = 9 - z \\ 3x + 5y = 9 - z \end{cases} \quad \textit{por Cramer}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9-z & 7 \\ 9-z & 5 \end{vmatrix}}{-16} = \frac{5(9-z) - 7(9-z)}{-16} = \frac{-2(9-z)}{-16} = \frac{9-z}{8}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9-z \\ 3 & 9-z \end{vmatrix}}{-16} = \frac{1(9-z) - 3(9-z)}{-16} = \frac{-2(9-z)}{-16} = \frac{9-z}{8}$$

$$\textit{Solución}\begin{cases} x = \dfrac{9-\lambda}{8} \\ y = \dfrac{9-\lambda}{8} \quad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$