Problema 2.1. Dadas las dos rectas **r** y **s**, que se cortan, de ecuaciones

$r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{2y-1}{-6} = \dfrac{2z-3}{6}$ y $s: \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{2y+3}{2} = \dfrac{z-1}{4}$, se pide calcular:

a) El punto P de corte de las rectas **r** y **s**. *(1,1 puntos).*

b) Un vector direccional de **r** y otro de **s** , *(0,5 puntos)*, y el ángulo α que forman las rectas **r** y **s** en el punto de corte P. *(0,6 puntos).*

c) La ecuación implícita $a x + b y + c z + d = 0$ del plano π que contiene a las rectas **r** y **s** *(1,1 puntos).*

Solución:

a) Escribimos las ecuaciones paramétricas de r y s.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{2y-1}{-6} = \frac{2z-3}{6}$$

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-\frac{1}{2}}{-3} = \frac{z-\frac{3}{2}}{3} \quad \rightarrow \quad r: \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \dfrac{1}{2} - 3\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = \dfrac{3}{2} + 3\lambda \end{cases}$$

$$s: \frac{x-3}{-2} = \frac{2y+3}{2} = \frac{z-1}{4}$$

$$s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y+\frac{3}{2}}{2} = \frac{z-1}{4} \quad \rightarrow \quad s: \begin{cases} x = 3-2\mu \\ y = -\dfrac{3}{2} + \mu \quad \mu \in \Re \\ z = 1+4\mu \end{cases}$$

Punto de corte entre r y s,

$$\begin{cases} 1+2\lambda = 3-2\mu \\ \dfrac{1}{2} - 3\lambda = -\dfrac{3}{2} + \mu \\ \dfrac{3}{2} + 3\lambda = 1+4\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\lambda + 2\mu = 2 \\ -3\lambda - \mu = -2 \\ 3\lambda - 4\mu = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

El determinante de la matriz ampliada de este sistema es $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \\ 3 & -4 & -1/2 \end{vmatrix} = 1+24-12+6-16-3 = 0$

Como en la matriz de coeficiente el menor $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -2+6 = 4 \neq 0$ *el sistema tiene solución única.*

Las rectas se cortan en,

$$\begin{cases} 2\lambda + 2\mu = 2 \\ -3\lambda - \mu = -2 \end{cases} \rightarrow \quad 2x2^{a} \quad \begin{cases} 2\lambda + 2\mu = 2 \\ -6\lambda - 2\mu = -4 \end{cases}$$

$$-4\lambda = -2 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

El punto de corte será,

$$\begin{cases} x = 1 + 2\dfrac{1}{2} = 2 \\ y = \dfrac{1}{2} - 3\dfrac{1}{2} = -1 \\ z = \dfrac{3}{2} + 3\dfrac{1}{2} = 3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad P(2, -1, 3)$$

b)

$$\overrightarrow{v_r} = (2, -3, -3) \qquad y \qquad \overrightarrow{v_s} = (-2, 1, 4)$$

$$siendo \quad \alpha = (\widehat{r, s}) \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|\left|\overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{\left|(2, -3, -3) \cdot (-2, 1, 4)\right|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 3^2}\ \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{\left|-4 - 3 + 12\right|}{\sqrt{4+9+9}\ \sqrt{4+1+16}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{22}\sqrt{21}} = \frac{5}{\sqrt{462}}$$

$$luego \quad \alpha = 76'548...^{\circ} \approx 76'55^{\circ}$$

c)

$$Del\ plano\ \pi\ conocemos \begin{cases} punto \quad P(2, -1, 3) \\ vectores\ directores \left\langle \begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (2, -3, -3) \\ \overrightarrow{v_s} = (-2, 1, 4) \end{array} \right. \end{cases}$$

la ecuación del plano será,

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ y+1 & -3 & 1 \\ z-3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)(-12-3) - (y+1)(8+6) + (z-3)(2-6) = 0$$

$$-15(x-2) - 14(y+1) - 4(z-3) = 0$$

$$-15x + 30 - 14y - 14 - 4z + 12 = 0$$

$$-15x - 14y - 4z + 28 = 0$$

$$15x + 14y + 4z - 28 = 0 \quad esta\ es\ la\ ecuación\ del\ plano\ \pi$$