**Problema 2.2.** Dados el punto $Q = (3, -1, 4)$ y la recta **r** de ecuación paramétrica

**r**: $x = -2 + 3\lambda$, $y = -2\lambda$, $z = 1 + 4\lambda$, se pide:

a) Hallar la distancia del punto $Q$ a la recta **r.** *(1,1 puntos).*

b) Justificar que la recta **s** que pasa por $Q$ y tiene a $(1, -1, 1)$ como vector direccional no corta a **r**. *(1,1 puntos).*

c) Calcular la distancia entre las rectas **r** y **s**. *(1,1 puntos).*

*Solución:*

*a)*

$$d(Q,r) = \frac{\left|\overrightarrow{P_rQ} \times \overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|} \qquad \textit{siendo } P_r \textit{ y } \overrightarrow{v_r} \textit{ punto y vector director de } r.$$

$$P_r = (-2, 0, 1) \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{P_rQ} = (5, -1, 3)$$

$$\overrightarrow{v_r} = (3, -2, 4)$$

$$\overrightarrow{P_rQ} \times \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-4+6) - \vec{j}(20-9) + \vec{k}(-10+3) = 2\vec{i} - 11\vec{j} - 7\vec{k} = (2, -11, -7)$$

$$\left|\overrightarrow{P_rQ} \times \overrightarrow{v_r}\right| = \sqrt{2^2 + (-11)^2 + (-7)^2} = \sqrt{4 + 121 + 49} = \sqrt{174}$$

$$\left|\overrightarrow{v_r}\right| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29}$$

$$d(Q,r) = \frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \sqrt{6} \ u.l.$$

*b)*

$$s: \begin{cases} Q(3, -1, 4) \\ \overrightarrow{v_s}(1, -1, 1) \end{cases} \qquad r: \begin{cases} P(-2, 0, 1) \\ \overrightarrow{v_r}(3, -2, 4) \end{cases}$$

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 3-(-2) \\ -2 & -1 & -1-0 \\ 4 & 1 & 4-1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 10 - 4 + 20 + 3 + 6 = 6 \quad \rightarrow \quad ran(M') = 3 \rightarrow \quad \textit{las rectas se cruzan.}$$

*c)*

$$d(r,s) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{PQ}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right|}$$

$$\left|\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{PQ}\right| = \left| \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \right| = |6| = 6$$

$$\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-2+4) - \vec{j}(3-4) + \vec{k}(-3+2) = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} =$$

$$= (2, 1, -1)$$

$$\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$d(r,s) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{PQ}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}\ u.\,l.$$