Matemáticas II Junio 2007

Problema 3.1. Se consideran las funciones reales $f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 9x - 5$ y $g(x) = 6x^2 - 7x + 2$. Se pide:

a) Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\frac{f(x)}{g(x)}$ *(1,6 puntos).*

b) Calcular la función $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)}dx$ que cumple $H(1) = 1$. *(1,7 puntos).*

Solución:

a)

Asíntotas de $y = \dfrac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2}$

Asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{12x^3}{6x^2} = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{12x^3}{6x^2} = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$$

Por lo tanto no tiene asíntota horizontal.

Asíntota vertical.

Buscamos las posibles asíntotas verticales,

$6x^2 - 7x + 2 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4.6.2}}{2.6} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{12} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{7 \pm 1}{12} = \begin{cases} \dfrac{7+1}{12} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3} \\[2mm] \dfrac{7-1}{12} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Posibles a.v. $x = \frac{1}{2}$ *y* $x = \frac{2}{3}$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \frac{12\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 9\frac{1}{2} - 5}{0} = \frac{12\frac{1}{8} - 8\frac{1}{4} + \frac{9}{2} - 5}{0} = \frac{\frac{12 - 16 + 36 - 40}{8}}{0} =$$

$$= \frac{\frac{48 - 56}{8}}{0} = \frac{\frac{-8}{8}}{0} = \frac{-1}{0} = \infty$$

luego $x = \frac{1}{2}$ *es asíntota vertical.*

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \frac{12\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 8\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 9\frac{2}{3} - 5}{0} = \frac{12\frac{8}{27} - 8\frac{4}{9} + 6 - 5}{0} = \frac{\frac{96 - 96}{27} + 1}{0} = \frac{1}{0} = \infty$$

luego $x = \frac{2}{3}$ *es asíntota vertical.*

Asíntota oblicua.

La asíntota oblicua es la recta de ecuación $y = m\,x + n$ *siendo,*

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{f(x)}{g(x)}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^3 - 7x^2 + 2x} = 2$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)} - 2x \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} - 2x \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5 - 12x^3 + 14x^2 - 4x}{6x^2 - 7x + 2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{6x^2 + 5x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = 1$$

Por lo tanto la asíntota oblicua es: $y = 2\,x + 1$

b)

$$H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2}$$

efectuemos la división polinómica

$$\begin{array}{rrrrr|l}
12x^3 & -\ 8x^2 & +\ 9x & -\ 5 & & 6x^2 - 7x + 2 \\ \cline{6-6}
-\ 12x^3 & +\ 14x^2 & -\ 4x & & & 2x + 1 \\ \cline{1-3}
& 6x^2 & +\ 5x & -\ 5 & & \\
& -\ 6x^2 & +\ 7x & -\ 2 & & \\ \cline{2-4}
& & 12x & -\ 7 & &
\end{array}$$

luego $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = (2x + 1) + \dfrac{12x - 7}{6x^2 - 7x + 2}$

$$H(x) = \int \left[(2x + 1) + \frac{12x - 7}{6x^2 - 7x + 2} \right] dx = x^2 + x + Ln\left|6x^2 - 7x + 2\right| + C$$

Como debe ser $H(1) = 1$

$$1 = 1^2 + 1 + Ln\left|6\,.\,1^2 - 7\,.\,1 + 2\right| + C$$

$$1 = 1 + 1 + Ln\left|6 - 7 + 2\right| + C$$

$$1 = 2 + Ln\left|1\right| + C$$

$$1 = 2 + 0 + C \quad \to \quad 1 = 2 + C \quad \to \quad C = -1$$

Por lo tanto $H(x) = x^2 + x - 1 + Ln\left|6x^2 - 7x + 2\right|$