Problema 3.2. Se considera la función real f (x) = $x^3 + a x^2 + b x + c$, donde *a, b* y *c* son parámetros reales.
a) Averiguar los valores de *a* y *b* para los que las rectas tangentes a la gráfica de *f*(*x*) en los puntos de abscisas *x* = 2 y *x* = *4* son paralelas al eje OX. *(2 puntos).*
b) Con los valores de *a* y *b* hallados anteriormente, obtener el valor de *c* para el que se cumple que el punto de inflexión de la gráfica de *f*(*x*) está en el eje OX. *(1,3 puntos).*

Solución:
a) Recta tangente a f(x) en x = 2 y x = 4 debe ser paralela al eje OX
Es decir que la r.t. a f(x) en x = 2 y x = 4 deben tener pendiente 0.
$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

pendiente de la r.t. a f(x) en x = 2
$f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + b = 12 + 4a + b$

pendiente de la r.t. a f(x) en x = 4
$f'(4) = 3 \cdot 4^2 + 2a \cdot 4 + b = 48 + 8a + b$

El sistema a resolver será
$\begin{cases} 12+4a+b=0 \\ 48+8a+b=0 \end{cases}$ *Multiplicando la 1ª ecuación por – 1* $\begin{cases} -12-4a-b=0 \\ 48+8a+b=0 \end{cases}$

sumando $36+4a=0$
$a=-9$

Sustituyendo el valor de a en la 1ª ecuación,
$12 + 4(-9) + b = 0$
$12 - 36 + b = 0$
$-24 + b = 0$
$b = 24$

Solución: a = – 9 y b = 24

b) f (x) = $x^3 - 9x^2 + 24x + c$*, obtener el valor de para que el punto de inflexión esté en el eje OX.*
$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$
$f''(x) = 6x - 18$
$6x - 18 = 0$; $x = 3$ *esta es la abcisa del punto d einflexión.*
Para $x = 3$; $f(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 + c = 27 - 81 + 72 + c = 18 + c$
Como el punto de inflexión debe estar en el eje OX, $18 + c = 0$; $c = -18$
Solución: c = – 18

La función que cumple las condiciones de los apartados a) y b) será:
$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$