

Problema 4.1. Unos altos hornos producen al día x toneladas de acero de baja calidad y $\frac{40-5x}{10-x}$ toneladas de acero de alta calidad, siendo 8 toneladas la producción máxima diaria de acero de baja calidad. Si el precio de una tonelada de acero de baja calidad es 100 euros y el precio de una tonelada de acero de alta calidad es 250 euros, demostrar que se deben producir 5 toneladas por día de acero de baja calidad para que el valor de venta de la producción diaria sea máximo. (3,3 puntos).

Solución:

La función que nos da el valor de la venta de la producción diaria es

$$V(x) = 100x + 250 \frac{40-5x}{10-x}$$

Busquemos el máximo de esta función,

$$\begin{aligned} V'(x) &= 100 + 250 \frac{-5(10-x) - (40-5x)(-1)}{(10-x)^2} = 100 + 250 \frac{-50 + 5x + 40 - 5x}{(10-x)^2} = 100 + 250 \frac{-10}{(10-x)^2} = \\ &= 100 - \frac{2500}{(10-x)^2} \end{aligned}$$

$$100 - \frac{2500}{(10-x)^2} = 0$$

$$100 = \frac{2500}{(10-x)^2}$$

$$100(10-x)^2 = 2500$$

$$(10-x)^2 = 25$$

$$10-x = \pm\sqrt{25}$$

$$10-x = \pm 5 \begin{cases} 10-x = 5 & \rightarrow x = 10-5 = 5 \\ 10-x = -5 & \rightarrow x = 10+5 = 15 \end{cases}$$

La solución $x = 15$ no es válida ya que supera la producción máxima diaria (que es de 8 Tm)

Veamos que ocurre con la solución $x = 5$

$$V''(x) = -\frac{-2500 \cdot 2(10-x)(-1)}{(10-x)^4} = \frac{-5000}{(10-x)^3}$$

$$\text{para } x = 5, \quad V''(5) = \frac{-5000}{(10-5)^3} = \frac{-5000}{5^3} < 0$$

luego $V(x)$ tiene un máximo relativo en $x = 5$. ¿Es el máximo de $V(x)$?

Por definición de la función $V(x)$, x puede tomar valores entre 0 y 8 (x son las toneladas de acero de baja calidad). Calculando los valores de $V(x)$ para $x = 0$, $x = 5$ y $x = 8$ determinaremos el máximo.

$$x = 0, \quad V(0) = 100 \cdot 0 + 250 \frac{40-5 \cdot 0}{10-0} = 250 \frac{40}{10} = 1000$$

$$x = 5, \quad V(5) = 100 \cdot 5 + 250 \frac{40-5 \cdot 5}{10-5} = 500 + 250 \frac{15}{5} = 1250$$

$$x = 8, \quad V(8) = 100 \cdot 8 + 250 \frac{40-5 \cdot 8}{10-8} = 800 + 250 \frac{0}{2} = 800$$

Por lo tanto el máximo se alcanza para $x = 5$.

Queda demostrado que se deben producir 5 Tm de acero de baja calidad para que el valor de venta de la producción diaria sea máximo.