Problema 1.1. Dado el sistema dependiente del parámetro real α $\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar, razonadamente los valores de α para los que el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible. *(1,3 puntos).*
b) Resolver el sistema cuando es compatible determinado. *(1,3 puntos).*
c) Obtener, razonadamente, la solución del sistema cuando $\alpha = 0$. *(0,7 puntos).*

Solución:
a)
Llamando A a la matriz de coeficientes del sistema y A' a la matriz ampliada,

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{array}\right)$$

A es una matriz 3x3, luego el máximo rango de A será 3
A' es una matriz 3x4, luego su máximo rango será 3

Estudiemos el rano de A

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 + 1 + 1 - \alpha - \alpha - \alpha = \alpha^3 - 3\alpha + 2$$

$$\alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0$$

$Por \quad Ruffini:$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & |0 \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & |0 & \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & |0 & & \end{array} \qquad Soluciones: \quad \alpha = 1 \quad y \quad \alpha = -2$$

$$Para \quad \alpha \neq 1 \quad y \quad \alpha \neq -2, \quad |A| \neq 0 \quad luego \quad ran(A) = 3 = ran(A') = n^{o}\ de\ incógnitas \quad \Rightarrow \quad S.C.D$$

$$Para \quad \alpha = -2$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Sabemos que | A | = 0 luego el rango de A será menor o igual que 2, como el menor de A

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) = 2$$

Ahora calculemos el rango de A'. Orlando el menor anterior de A, no nulo, con 3ª fila y 4ª columna de A´,

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 1 + 1 + 2 + 2 - 1 = 9 \neq 0 \qquad luego \quad ran(A') = 3$$

ran(A) = 2 ≠ 3 = ran(A'), Sistema Incompatible

Para $\alpha = 1$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como esta matriz tiene todas sus filas (o columnas) iguales para estudiar su rango sólo debemos considerar una fila, la 1ª por ejemplo, como esta fila tiene elementos no nulos ran(A´) = 1. Lo mismo ocurre con la matriz A, por lo que ran(A) = ran(A´) = 1 < 3 = nº de incógnitas, Sistema Compatible Indeterminado.

b) Resolvamos el sistema para $\alpha \neq -2$ *y* $\alpha \neq 1$

Resolvemos el sistema por Cramer,

$$\begin{cases} \alpha\, x + y + z = 1 \\ x + \alpha\, y + z = 1 \\ x + y + \alpha\, z = 1 \end{cases}$$

Utilizaremos los resultados obtenidos en el apartado a)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\alpha^2 + 1 + 1 - \alpha - 1 - \alpha}{\alpha^3 - 3\alpha + 2} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{\alpha^3 - 3\alpha + 2} =$$

Como las raíces del polinomio $\alpha^3 - 3\alpha + 2$ *son (obtenido en a))* $\alpha = 1$ *doble y* $\alpha = -2 \Rightarrow$

$\alpha^3 - 3\alpha + 2 = (\alpha - 1)^2\,(\alpha + 2)$

Siguiendo con el cálculo de x,

$$= \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{(\alpha-1)^2\,(\alpha+2)} = \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2\,(\alpha+2)} = \text{ como } \alpha \neq 1 \text{ podemos simplificar por } \alpha - 1 = \frac{1}{(\alpha+2)}$$

como $\alpha \neq -2$ *la solución anterior existe puesto que el denominador es no nulo.*

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\alpha^2 + 1 + 1 - 1 - \alpha - \alpha}{(\alpha-1)^2\,(\alpha+2)} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 2}{(\alpha-1)^2\,(\alpha+2)} = \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2\,(\alpha+2)} = \frac{1}{(\alpha+2)}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\alpha^2 + 1 + 1 - \alpha - \alpha - 1}{(\alpha-1)^2\,(\alpha+2)} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 2}{(\alpha-1)^2\,(\alpha+2)} = \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2\,(\alpha+2)} = \frac{1}{(\alpha+2)}$$

Cuando el sistema es compatible determinado la solución es: $x = y = z = \dfrac{1}{\alpha - 2}$

c) Solución para $\alpha = 0$

Como 0 es distinto de -2 *y 1, para este valor de* α *obtendremos la solución del sistema usando el resultado del apartado anterior. Es decir,*

$$x = y = z = \frac{1}{0 + 2} = \frac{1}{2}$$

Para $\alpha = 0$ *la solución del sistema es* $x = y = z = \dfrac{1}{2}$