Problema 1.2. Sean I y A las matrices cuadradas siguientes: $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}$

Se pide calcular, escribiendo explícitamente las operaciones necesarias:

a) Las matrices A^2 y A^3. *(1,8 puntos).*

b) Los números reales α y β para los que se verifica $(I+A)^3=\alpha\, I+\beta\, A$. *(1,8 puntos).*

Solución:

a)

Cálculo de A^2

$$A^2 = A\,.\,A=\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\,.\,17-29\,.\,10 & 17\,.\,29-29\,.\,17\\ -10\,.\,17+17\,.\,10 & -10\,.\,29+17\,.\,17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Hemos obtenido que $A^2 = -I$

Cálculo de A^3

$A^3 = A^2\,.\,A = -I\,.\,A = -A$

$$A^3=-A=-\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17 & -29\\ 10 & 17\end{pmatrix}$$

b) Utilizaremos los resultados del anterior apartado $A^2 = -I$ y $A^3 = -A$

$$(I+A)^3=(I+A)^2(I+A)$$

$$(I+A)^2=(I+A)(I+A)=I.I+I.A+A.I+A.A=I+A+A+A^2=I+2A-I=2A$$

$$(I+A)^3=2A(I+A)=2AI+2AA=2A+2A^2=2A-2I=-2I+2A$$

por lo que $\alpha=-2$ *y* $\beta=2$