Problema 2.1. Se dan los puntos A = (2 , 1 , 1) y B = (1 , 0 , – 1), y la recta **r** de ecuación $r : x-5 = y = \frac{z+2}{-2}$

Se pide calcular razonadamente:
a) El punto C de **r** que equidista de A y B. *(2 puntos).*
b) El área del triángulo ABC. *(1,3 puntos).*

Solución:
a)

$$Buscamos \quad C \in r \quad / \quad d(A,C) = d(B,C)$$

Escribamos la ecuación paramétrica de la recta r; como conocemos su ecuación en forma continua es fácil escribir la ecuación paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = 5+\lambda \\ y = \lambda \qquad\qquad \lambda \in \Re \\ z = -2-2\lambda \end{cases}$$

Por lo que las coordenadas de cualquier punto de la recta r, en particular del C que buscamos, son

$$(5+\lambda \,, \lambda \,, -2-2\lambda)$$

Calculemos las distancias indicadas,

$$d(A,C) = \sqrt{(5+\lambda-2)^2 + (\lambda-1)^2 + (-2-2\lambda-1)^2} = \sqrt{(3+\lambda)^2 + (\lambda-1)^2 + (-3-2\lambda)^2} =$$
$$= \sqrt{9+6\lambda+\lambda^2+\lambda^2-2\lambda+1+9+12\lambda+4\lambda^2} = \sqrt{6\lambda^2+16\lambda+19}$$

$$d(B,C) = \sqrt{(5+\lambda-1)^2 + (\lambda-0)^2 + (-2-2\lambda+1)^2} = \sqrt{(4+\lambda)^2 + (\lambda)^2 + (-1-2\lambda)^2} =$$
$$= \sqrt{16+8\lambda+\lambda^2+\lambda^2+1+4\lambda+4\lambda^2} = \sqrt{6\lambda^2+12\lambda+17}$$

$$Igualándolas:$$

$$\sqrt{6\lambda^2+16\lambda+19} = \sqrt{6\lambda^2+12\lambda+17}$$

Resolvemos la ecuación planteada elevando ambos miembros de la igualdad al cuadrado,

$$6\lambda^2+16\lambda+19 = 6\lambda^2+12\lambda+17 \quad \to \quad 4\lambda+2=0 \quad \to \quad \lambda = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

Comprobemos que esta solución lo es de la ecuación irracional inicial,

$$\sqrt{6\lambda^2+16\lambda+19} = \sqrt{6\lambda^2+12\lambda+17}$$

$$\sqrt{6\left(\frac{-1}{2}\right)^2+16\left(\frac{-1}{2}\right)+19} = \sqrt{6\left(\frac{-1}{2}\right)^2+12\left(\frac{-1}{2}\right)+17}$$

$$\sqrt{6\frac{1}{4}-8+19} = \sqrt{6\frac{1}{4}-6+17}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}+11} = \sqrt{\frac{3}{2}+11} \quad cierto, \quad luego \quad \lambda = \frac{-1}{2}\, es\ válida.$$

$$Y \quad finalmente \quad C = \left(5-\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, -2-2\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{-1}{2}, -1\right)$$

Otra forma de resolverlo,

Calculamos el siguiente plano:

π *plano que pasa por* $PM_{\overline{AB}}$ *y* $\perp$ $\vec{AB}$

$PM_{\overline{AB}} \quad \left(\frac{2+1}{2}, \frac{1+0}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

$\vec{AB} \quad (1-2, 0-1, -1-1) = (-1, -1, -2) \approx (1, 1, 2)$

La educación del plano será: x + y + 2 z + D = 0, con la condición de que pase por $PM_{\overline{AB}}$

$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2.0 + D = 0 \quad \rightarrow \quad 2 + D = 0 \quad \rightarrow \quad D = -2$

$\pi: \quad x + y + 2z - 2 = 0$

El punto C será el de corte entre la recta r y el plano π

$5 + \lambda + \lambda + 2(-2 - 2\lambda) - 2 = 0$

$5 + \lambda + \lambda - 4 - 4\lambda - 2 = 0$

$-1 - 2\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{-1}{2}$

luego $C = \left(5 - \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, -2 - 2\,\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{-1}{2}, -1\right)$

b) Área del triángulo ABC

$\mathbf{A} = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ **y** $\mathbf{B} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{-1})$ **y** $C = \left(\frac{9}{2}, \frac{-1}{2}, -1\right)$

$Área = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$

$\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -2)$

$\overrightarrow{AC} = \left(\frac{5}{2}, \frac{-3}{2}, -2\right)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -2 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ \frac{-3}{2} & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ \frac{5}{2} & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} \end{vmatrix} = \vec{i}\,(2-3) - \vec{j}(2+5) + \vec{k}\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) =$$

$= (-1, -7, 4)$

$y \quad |(-1, -7, 4)| = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 49 + 16} = \sqrt{66}$

y el área será $\frac{1}{2}\sqrt{66} = \frac{\sqrt{66}}{2}\,u.a.$