Problema 2.2. Dadas la recta **r**, intersección de los planos y + z = 0 y x – 2 y – 1 = 0, y la recta **s** de ecuación $s: \frac{x}{2} = y - 1 = -z + 3$, se pide

a) Obtener, razonadamente, las ecuaciones paramétricas de **r** y **s**. *(1,1 puntos).*
b) Explicar de un modo razonado cuál es la posición relativa de las rectas **r** y **s**. *(1,1 puntos).*
c) Calcular la distancia entre las rectas **r** y **s**. *(1,1 puntos).*

Solución:
a) Ecuaciones paramétricas de r

Resolvamos el sistema de ecuaciones que define la recta r

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$

podemos resolver el sistema anterior usando x e y como incógnitas principales,

$$\begin{cases} y = -z \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{2z - 1}{-1} = -2z + 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{z}{-1} = -z$$

Por lo que las ecuaciones paramétricas de la recta r serán: $\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

Ecuaciones paramétricas de s

$$s: \frac{x}{2} = y - 1 = -z + 3$$

la ecuación continua será $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-1}$

y la paramétrica $\begin{cases} x = 2\mu \\ y = 1 + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases} \quad \mu \in \Re$

b) Posición relativa de r y s.

Estudiemos el sistema que plantearíamos para buscar el punto de corte entre las rectas,

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda = 2\mu \\ -\lambda = 1 + \mu \\ \lambda = 3 - \mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2\lambda - 2\mu = -1 \\ -\lambda - \mu = 1 \\ \lambda + \mu = 3 \end{cases}$$

La matriz ampliada del sistema $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$

En la matriz de coeficientes, A, vemos que $C_1 = C_2$ *y que tiene elementos no nulos, luego ran(A) = 1*

En la matriz ampliada, como $C_1 = C_2$ $|A'| = 0$ *y* $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2-1 = -3 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 2$

Como ran(A) = 1 y ran(A´)=2, las rectas r y s son paralelas.

c) Como las rectas r y s son paralelas

$$d(r,s) = d(P_r, s) = \frac{\left|\overrightarrow{P_sP_r} \times \overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_s}\right|}$$

$$\begin{matrix} P_r(1,0,0) \\ P_s(0,1,3) \end{matrix} \rightarrow \overrightarrow{P_sP_r}(1,-1,-3)$$

$\overrightarrow{v_s}(2,1,-1)$

$$\overrightarrow{P_sP_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(1+3) - \vec{j}(-1+6) + \vec{k}(1+2) = (4,-5,3)$$

$$\left|\overrightarrow{P_sP_r} \times \overrightarrow{v_s}\right| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 3^2} = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\left|\overrightarrow{v_s}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

Por lo que $d(r,s) = \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \dfrac{5}{\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3} u.l.$