Problema 3.1. Se considera, en el primer cuadrante, la región R del plano limitada por: el eje X, el eje Y, la recta x = 2 y la curva $y=\frac{1}{4+x^2}$.

a) Calcular razonadamente el área de la región R. *(1,5 puntos).*

b) Encontrar el valor de α para que la recta $x=\alpha$ divida la región R en dos partes A (izquierda) y B (derecha) tales que el área de A sea el doble que la de B. *(1,8 puntos).*

Solución:

a) Representación gráfica de $y=\frac{1}{4+x^2}$

Dom y = R

$4+x^2=0$; $x^2=-4$ no tiene soluciones reales, Dom y = R

Puntos de corte con ejes coordenados (0 , ¼)

x = 0; y = ¼

y = 0; 0 = 1 no hay solución

Asíntotas

No tiene asíntota vertical ya que el dominio de la función es R

horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{4+x^2}=\frac{1}{+\infty}=0$$

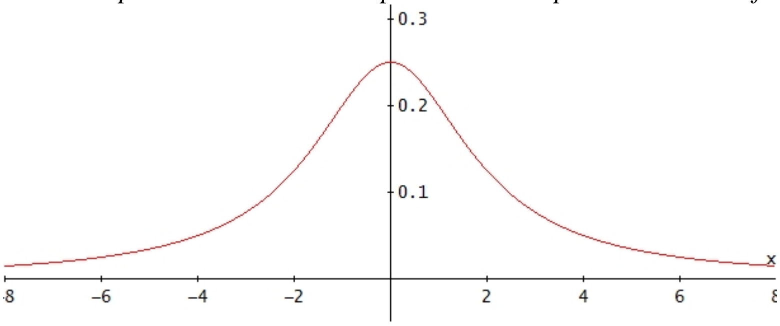
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4+x^2}=\frac{1}{+\infty}=0$$

por lo tanto y = 0 es la a. h.

oblicua, no tiene ya que es un cociente de polinomios con a. horizontal

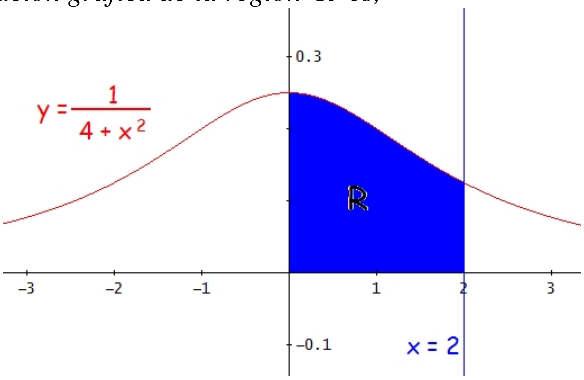
$\forall x\in\Re,\quad 4+x^2>0 \quad\to\quad \frac{1}{4+x^2}>0$ *La función está por encima del eje OX*

A partir de estos datos podemos hacer una representación aproximada de la función dada,



Esta representación es suficiente para resolver el problema.

La representación gráfica de la región R es,



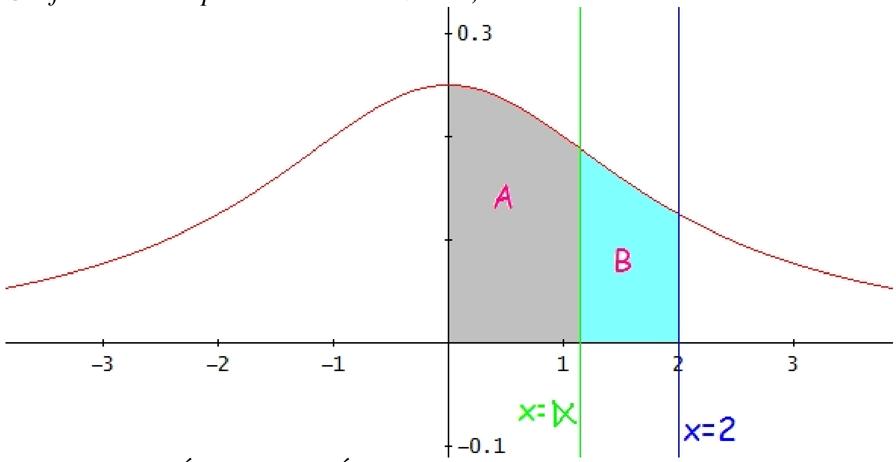
Por lo tanto el cálculo de su área lo realizamos mediante la siguiente integral definida,

$$\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}dx = \int_0^2 \frac{\frac{1}{4}}{\frac{4}{4}+\frac{x^2}{4}}dx = \int_0^2 \frac{\frac{1}{4}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\left[arctg\,\frac{x}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[arctg\,\frac{2}{2} - arctg\,\frac{0}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}[arctg\ 1 - arctg\ 0] = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{8}$$

Luego el área de la región R mide $\frac{\pi}{8}$ *u.a.*

b) Gráficamente el problema a resolver es,



de forma que Área (A) = 2 Área(B)

Cálculo del área de A, (utilizamos parte del cálculo integral realizado en el apartado anterior)

$$Área(A) = \int_0^{\alpha} \frac{1}{4+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[arctg\,\frac{x}{2}\right]_0^{\alpha} = \frac{1}{2}\left[arctg\,\frac{\alpha}{2} - arctg\,\frac{0}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[arctg\,\frac{\alpha}{2} - arctg\ 0\right] = \frac{1}{2}\left(arctg\,\frac{\alpha}{2} - 0\right) = \frac{1}{2}arctg\,\frac{\alpha}{2}$$

Cálculo del área de B,

$$Área(B) = \int_{\alpha}^2 \frac{1}{4+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[arctg\,\frac{x}{2}\right]_{\alpha}^2 = \frac{1}{2}\left[arctg\,\frac{2}{2} - arctg\,\frac{\alpha}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[arctg\,1 - arctg\,\frac{\alpha}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - arctg\,\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}arctg\,\frac{\alpha}{2}$$

Por lo que,

$$\frac{1}{2}arctg\,\frac{\alpha}{2} = 2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}arctg\,\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}arctg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} - arctg\,\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{3}{2}arctg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$arctg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{2\pi}{3\,.\,4}$$

$$arctg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{6} \quad \to \quad \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \to \quad \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cong 1{,}1547$$