**Problema 3.2.** Se considera la función real f (x) = $x^2 - 4$. Obtener, explicando el proceso de cálculo:
a) La gráfica de la curva *y = f(x)*. *(2 puntos).*
b) Los valores de *x* para los que está definida la función real *g(x) = ln f(x)*. *(1,3 puntos).*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *g(x)*, razonando si tiene, o no, máximo absoluto. *(1,3 puntos).*

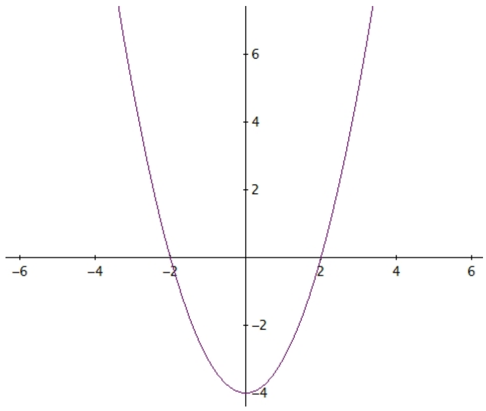
*Solución:*
*a) Podemos obtener la gráfica de esta curva de dos formas diferentes.*

*a1) Como* $y = x^2 - 4$ *es una función polinómica de 2º grado, gráficamente es una parábola.*
*Efectuemos los cálculos para representar esta parábola.*
*Puntos de corte con los ejes coordenados,*
$x = 0, \quad y = 0^2 - 4 = -4$
$y = 0, \quad 0 = x^2 - 4; \quad x^2 = 4;$ *dos soluciones:* $x_1 = 2$ *y* $x_2 = -2$
*Los puntos de corte son ( 0 , – 4 ), ( 2 , 0 ) y ( – 2 , 0 )*
*Vértice de la parábola,*

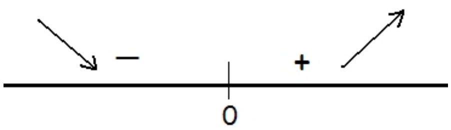
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2.1} = 0 \quad \rightarrow \quad y = -4$$

*El vértice es ( 0 , – 4 )*

*La gráfica de* $y = x^2 - 4$ *es*

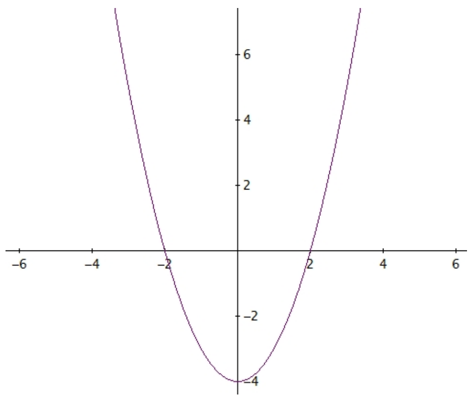



*a2)* $y = x^2 - 4$ *tratada como función.*
*Dom y = R, por ser una función polinómica.*
*Puntos de corte con los ejes coordenados,*
$x = 0, \quad y = 0^2 - 4 = -4$
$y = 0, \quad 0 = x^2 - 4; \quad x^2 = 4;$ *dos soluciones:* $x_1 = 2$ *y* $x_2 = -2$
*Los puntos de corte son ( 0 , – 4 ), ( 2 , 0 ) y ( – 2 , 0 )*
*Monotonía, signo de y´*
$y' = 2x$
$2x = 0; \quad x = 0$




*Decreciente* $(-\infty, 0)$
*Creciente* $(0, +\infty)$
*Mínimo relativo* $(0, -4)$

*La gráfica de* $y = x^2 - 4$ *es*



*b)* $g(x) = Ln\ (x^2 - 4)$. *Buscamos el dominio de* $g(x)$

$x^2 - 4 > 0$, *considerando la representación gráfica realizada en el apartado anterior obtenemos inmediatamente la solución de esta inecuación que es el dominio de* $g(x)$,

$Dom\ g(x) = (-\infty\,,-2) \cup (2\,,+\infty)$

*c) Monotonía de* $g(x)$

$g(x) = Ln\ (x^2 - 4)$

$$g'(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$$

*estudiemos el signo de* $g'(x)$, *para ello buscamos las raíces del numerador y del denominador,*

$2x = 0;\ \ x = 0$

$x^2 - 4 = 0$; *dos soluciones:* $x_1 = 2$ *y* $x_2 = -2$

*Representando estas raíces en la recta real y teniendo en cuenta el dominio de* $g(x)$, *obtenemos*



*Por lo tanto* $g(x)$ *es*
*Decreciente* $(-\infty\,,-2)$
*Creciente* $(2\,,+\infty)$

*Y* $g(x)$ *no tiene ni máximos ni mínimos relativos. Para comprobar si* $g(x)$ *tiene máximo absoluto representémosla gráficamente. Ya conocemos su dominio y su monotonía.*

$Dom\ g(x) = (-\infty\,,-2) \cup (2\,,+\infty)$

*Puntos de corte con eje OX,*

$$y = 0 \ \rightarrow\ Ln(x^2 - 4) = 0 \ \rightarrow\ x^2 - 4 = 1 \ \rightarrow\ x^2 = 5 \ \rightarrow\ x = \pm\sqrt{5} \cong \pm 2{,}23 \in Dom\ g(x) \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} (-\sqrt{5}\,,0) \\ (\sqrt{5}\,,0) \end{matrix}$$

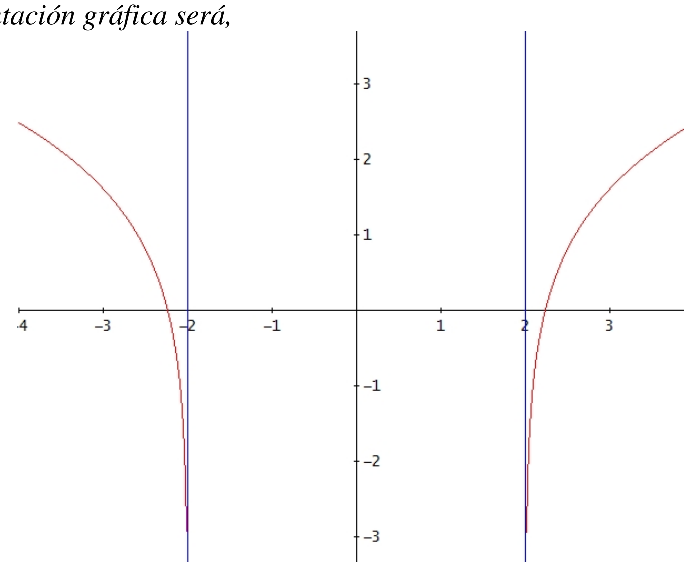
*no hay corte con el eje OY porque* $x = 0$ *no es del dominio de* $g(x)$

*Asíntota vertical,*

$$\lim_{x \to -2^-} Ln(x^2 - 4) = Ln\ 0 = -\infty \ \rightarrow\ x = -2 \ \ es \ \ a.v.$$

$$\lim_{x \to 2^+} Ln(x^2 - 4) = Ln\ 0 = -\infty \ \rightarrow\ x = 2 \ \ es \ \ a.v.$$

*La representación gráfica será,*




*Luego* $g(x)$ *no tiene máximo absoluto.*