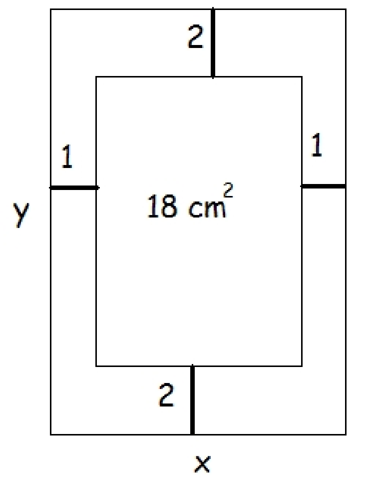
Problema 4.1. Una empresa decide lanzar una campaña de propaganda de uno de sus productos editando un texto que ocupa 18 cm^2 en hojas rectangulares impresas a una cara, con márgenes superior e inferior de 2 cm y laterales de 1 cm. Se pide calcular, razonadamente, las dimensiones de la hoja para las que el consumo de papel sea mínimo. *(3,3 puntos).*

Solución:

El formato y dimensiones de la hoja que se utiliza es:



Dimensiones de la hoja:
Largo: y
Ancho: x

Consumo de papel: x y

La relación entre x e y viene dada por el área que ocupa el texto impreso:

$$(y-4)(x-2)=18 \quad \to \quad y-4=\frac{18}{x-2} \quad \to \quad y=4+\frac{18}{x-2}$$

Por la forma de la propaganda los valores de x e y deben cumplir que: $x>2$ *e* $y>4$

La función que debemos minimizar, C(x), consumo de papel, será:

$$C(x)=x\ y=x\left(4+\frac{18}{x-2}\right)=4x+\frac{18x}{x-2}$$

por la condición que debe cumplir el valor de x deducimos que $Dom\ C(x)=\left(\,2\,,+\infty\right)$

Busquemos los extremos relativos de la función C(x).

$$C'=4+\frac{18(x-2)-18x}{(x-2)^2}=4+\frac{18(x-2)-18x}{(x-2)^2}=4+\frac{18x-36-18x}{(x-2)^2}=4+\frac{-36}{(x-2)^2}=4-\frac{36}{(x-2)^2}$$

$$C'=0 \quad \to \quad 4-\frac{36}{(x-2)^2}=0 \quad \to \quad 4=\frac{36}{(x-2)^2} \quad \to \quad 4(x-2)^2=36 \quad \to \quad (x-2)^2=9 \quad \to \quad x-2=\pm\sqrt{9}$$

$$x-2=\pm 3 \quad \to \quad \left\langle \begin{array}{l} x-2=3 \quad \to \quad x=5 \\ x-2=-3 \quad \to \quad x=-1 \quad \textit{solución no válida pues } x>2 \end{array}\right.$$

Calculemos C´´ para determinar el tipo de extremo.

Expresemos C´ de la siguiente forma, C´(x) = 4 – 36 (x – 2)$^{-2}$

C´´(x) = – 36 (– 2) (x – 2)$^{-3}$ *= 72 (x – 2)*$^{-3}$*=* $\dfrac{72}{(x-2)^3}$

$$\textit{para } x=5, \quad C''=\frac{72}{(5-2)^3}=\frac{72}{27}>0 \quad \to \quad x=5 \ \textit{ mínimo relativo}$$

Comprobemos que este mínimo relativo es absoluto estudiando la función C(x). Como el dominio de esta función es un intervalo calculamos sus límites en los extremos del intervalo,

$$\underset{x\to 2^+}{Lím}\left(4x+\frac{18}{x-2}\right)=8+(+\infty)=+\infty$$

$$x\to 2^+ \quad \Rightarrow \quad (x-2)\to 0^+ \quad \Rightarrow \quad \frac{18}{x-2}\to +\infty$$

$$\underset{x\to +\infty}{Lím}\left(4x+\frac{18}{x-2}\right)=(+\infty)+0=+\infty$$

Luego el mínimo relativo anterior es un mínimo absoluto. Nos falta calcular el valor de y,

$$\textit{para} \quad x=5 \qquad y=4+\frac{18}{5-2}=4+\frac{18}{3}=4+6=10$$

Solución:

El consumo de papel es mínimo para una hoja de papel de 5 cm. x 10 cm.