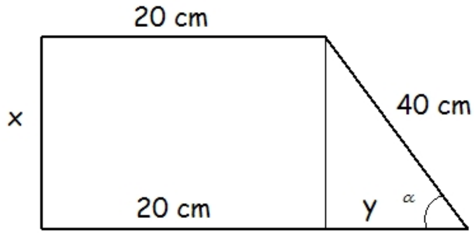
Problema 4.2. Una ventana tiene forma de trapecio rectangular. La base menor mide 20 cm y el lado oblicuo mide 40 cm. Hallar, razonadamente, el ángulo α que debe formar el lado oblicuo con la base mayor para que el área de la ventana sea máxima. *(3,3 puntos).*

Nota: Un trapecio rectangular es un cuadrilátero con dos lados paralelos y en el que uno de los otros dos lados es perpendicular a estos dos lados paralelos.

Solución:

Gráficamente el problema a resolver es



$¿\alpha?\,/\quad A_{trapecio}$ *sea máxima*

$$A_{trapecio} = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{\big((20+y)+20\big)x}{2}$$

Calculemos los valores de x e y en función del ángulo. En el triángulo rectángulo de la figura se obtiene:

$$sen\ \alpha = \frac{x}{40} \quad \rightarrow \quad x = 40\ sen\ \alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{y}{40} \quad \rightarrow \quad y = 40\cos\alpha$$

$$luego \quad A(\alpha) = \frac{\big((20+40\cos\alpha)+20\big)\,40\ sen\ \alpha}{2} = \frac{\big(40+40\cos\alpha\big)\,40\ sen\ \alpha}{2} = \big(40+40\cos\alpha\big)\,20\ sen\ \alpha$$

Por construcción de la figura α *deber ser un ángulo agudo, luego* $\alpha \in \left(0\,,\frac{\pi}{2}\right)$

La función A es una función continua por serlo las funciones seno y coseno y porque las operaciones que intervienen en su definición (suma y producto) también son continuas.
Procedamos a obtener el máximo de la función A

$$A' = -40\ sen\ \alpha\ .\ 20\ sen\ \alpha + (40+40\cos\alpha)\ 20\cos\alpha = -800\ sen^2\ \alpha + 800\cos\alpha + 800\cos^2\alpha =$$

$$sabemos\ que\ \forall\alpha, \quad sen^2\ \alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad sen^2\ \alpha = 1-\cos^2\alpha$$

$$= -800\,\big(1-\cos^2\alpha\big) + 800\cos\alpha + 800\cos^2\alpha = -800 + 800\cos^2\alpha + 800\cos\alpha + 800\cos^2\alpha =$$

$$= 1600\cos^2\alpha + 800\cos\alpha - 800$$

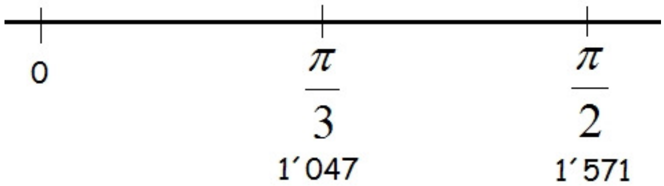
$$A' = 0 \quad \rightarrow \quad 1600\cos^2\alpha + 800\cos\alpha - 800 = 0 \quad \rightarrow \quad 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\ .\ 2\ .\ (-1)}}{2\ .\ 2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{4} = \frac{-1\pm 3}{4} = \begin{cases} \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-1-3}{4} = \dfrac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos\alpha = -1 \quad \rightarrow \quad \alpha = \pi \quad solución\ no\ válida,\ ya\ que\ \ \alpha \in \left(0\,,\frac{\pi}{2}\right)$$

Para determinar si la solución es máximo estudiemos el signo de A´ a ambos lados de la solución obtenida para A´ = 0.

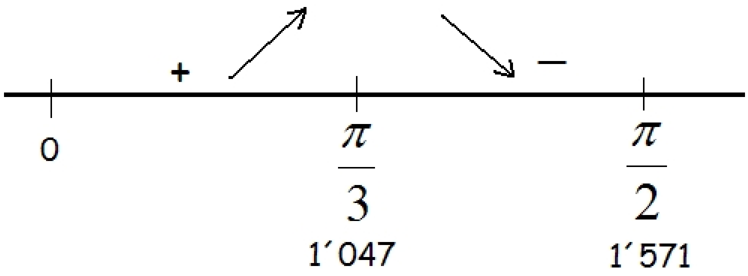


Estudiamos el signo de A´ en puntos intermedios de los dos intervalos en que está dividido el dominio de A,

$\alpha = 0'5 \quad A' = 1600\cos^2 0'5 + 800\cos 0'5 - 800 = 1134'3079 > 0$

$\alpha = 1'3 \quad A' = 1600\cos^2 1'3 + 800\cos 1'3 - 800 = -471'5119 < 0$

Tenemos el siguiente resultado:



Luego la función A tiene un máximo relativo para $\alpha = \frac{\pi}{3}$

Como la función A, que es continua, es creciente a la izquierda de este valor y decreciente a su derecha, este máximo relativo es absoluto.

Para $\alpha = \frac{\pi}{3}$ $\quad A = \left(40 + 40\cos\frac{\pi}{3}\right) 20 \, sen\,\frac{\pi}{3} = \left(40 + 40\,\frac{1}{2}\right) 20\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 60\,.\,20\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 600\sqrt{3}$

Por lo tanto, para que el área de la ventana sea máxima el ángulo $\alpha = \frac{\pi}{3}$ *rds y este área medirá* $600\sqrt{3}\ cm^2$