Problema 1.1. Dadas las matrices cuadradas $A=\begin{pmatrix}3&6&0\\0&3&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}18&48&12\\0&18&12\\0&0&6\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

se pide:

a) Justificar que la matriz A tiene inversa y obtener razonadamente la matriz inversa A^{-1} , incluyendo en la respuesta todos los pasos que llevan a la obtención de A^{-1}. *(1,1 puntos).*

b) Calcular, razonadamente, el determinante de la matriz $3\,A^{-1}$, incluyendo en la respuesta todos los pasos realizados. *(1,1 puntos).*

a) Obtener razonadamente los valores reales x, y, z que verifican la ecuación $x\,I + y\,A + z\,A^2 = B$. *(1,1 puntos).*

Solución:

a) Justificar que la matriz A tiene inversa.

$$Calculemos \quad |A|=\begin{vmatrix}3&6&0\\0&3&2\\0&0&1\end{vmatrix}=3.3.1=9\neq 0 \quad luego \quad \exists\, A^{-1}$$

Cálculo de A^{-1}

$$A=\begin{pmatrix}3&6&0\\0&3&2\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\alpha_{ij}}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}3&2\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&2\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&3\\0&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}6&0\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&0\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&6\\0&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}6&0\\3&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&0\\0&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&6\\0&3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\6&3&0\\12&6&9\end{pmatrix}\xrightarrow{A_{ij}}$$

$$\begin{pmatrix}3&0&0\\-6&3&0\\12&-6&9\end{pmatrix}\xrightarrow{A_{ji}}\begin{pmatrix}3&-6&12\\0&3&-6\\0&0&9\end{pmatrix}$$

$$luego \quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(A_{ji}\right)=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3&-6&12\\0&3&-6\\0&0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3&-2/3&4/3\\0&1/3&-2/3\\0&0&1\end{pmatrix}$$

En el proceso de cálculo de A^{-1} cada uno de los pasos realizados son los siguientes,

α_{ij}	*Formar una matriz con los menores complementarios de cada elemento*
A_{ij}	*Obtener los adjuntos de cada elemento cambiando el signo alternativamente*
A_{ji}	*Trasponer la matriz anterior.*

b) Calcular $|3\,A^{-1}|$

Como A^{-1} es una matriz 3x3, $|3\,A^{-1}| = 3^3\,|A^{-1}| = 27\,|A^{-1}| =$

También sabemos que $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$ *luego,*

$$=27\frac{1}{|A|}=27\frac{1}{9}=3$$

c) Resolver $x\,I + y\,A + z\,A^2 = B$

Calculemos A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.3+6.0+0.0 & 3.6+6.3+0.0 & 3.0+6.2+0.1 \\ 0.3+3.0+2.0 & 0.6+3.3+2.0 & 0.0+3.2+2.1 \\ 0.3+0.0+1.0 & 0.6+0.3+1.0 & 0.0+0.2+1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 36 & 12 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación que debemos resolver es

$$x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 9 & 36 & 12 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

expresión que da lugar al siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} x+3y+9z=18 \\ 6y+36z=48 \\ 12z=12 \\ 0=0 \\ x+3y+9z=18 \\ 2y+8z=12 \\ 0=0 \\ 0=0 \\ x+y+z=6 \end{cases}$$

Eliminando las ecuaciones repetidas y las que no aportan información (0 = 0),

$$\begin{cases} x+3y+9z=18 \\ 6y+36z=48 \\ 12z=12 \\ 2y+8z=12 \\ x+y+z=6 \end{cases}$$

Simplificando coeficientes

$$\begin{cases} x+3y+9z=18 \\ y+6z=8 \\ z=1 \\ y+4z=6 \\ x+y+z=6 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de z que nos aporta la 3ª ecuación en las restantes, el sistema quedará:

$$\begin{cases} x+3y+9.1=18 \\ y+6.1=8 \\ y+4.1=6 \\ x+y+1=6 \end{cases}$$

Efectuando las operaciones pendientes,

$$\begin{cases} x+3y=9 \\ y=2 \\ y=2 \\ x+y=5 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de y obtenido en la 2ª y 3ª ecuaciones en las restantes,

$$\begin{cases} x+3.2=9 \\ x+2=5 \end{cases}$$

Efectuando las operaciones pendientes,

$$\begin{cases} x=3 \\ x=3 \end{cases}$$

Por lo tanto la solución de la ecuación inicial es: x = 3, y = 2, z = 1