Problema 1.2. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases}(\alpha+3)\,x-4\,y-2z=4\\ x-2\,y-(\alpha+2)z=2\\ 2x+(\alpha-3)y-2\,z=4\end{cases}$, se pide, razonando las respuestas:

a) Justificar que para el valor de $\alpha=0$ el sistema es incompatible. *(1,1 puntos).*
b) Determinar los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado. *(1,1 puntos).*
c) Resolver el sistema para el valor del parámetro α para el cual es compatible indeterminado. *(1,1 puntos).*

Solución:
Previamente realizamos el estudio del sistema según los valores del parámetro α.
Llamando A a la matriz de coeficientes del sistema y A´ a la ampliada, tenemos

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c}\alpha+3 & -4 & -2 & 4\\ 1 & -2 & -(\alpha+2) & 2\\ 2 & \alpha-3 & -2 & 4\end{array}\right)$$

Como la matriz A es 3x3, el máximo rango de A será 3.
Como la matriz A´es 3x4, el máximo rango de A´ será 3.
Por lo que procedemos a estudiar el rango de A.

$$|A|=\begin{vmatrix}\alpha+3 & -4 & -2\\ 1 & -2 & -(\alpha+2)\\ 2 & \alpha-3 & -2\end{vmatrix}=4(\alpha+3)-2(\alpha-3)+8(\alpha+2)-8+(\alpha+3)(\alpha-3)(\alpha+2)-8=$$

$$=4\alpha+12-2\alpha+6+8\alpha+16-16+(\alpha+3)(\alpha-3)(\alpha+2)=10\alpha+18+\left(\alpha^2-9\right)(\alpha+2)=$$

$$=10\alpha+18+\alpha^3-9\alpha+2\alpha^2-18=\alpha^3+2\alpha^2+\alpha=\alpha\left(\alpha^2+2\alpha+1\right)=\alpha(\alpha+1)^2$$

Los valores de α que anulan el determinante de A serán,

$$\alpha(\alpha+1)^2=0 \quad \to \left\langle\begin{array}{l}\alpha=0\\ (\alpha+1)^2=0 \quad \to \quad \alpha+1=0 \quad \to \quad \alpha=-1\end{array}\right.$$

A partir de estos cálculos vamos a contestar a las cuestiones del problema.

a) Justificar que para α = 0 el sistema es incompatible.

Según el estudio realizado anteriormente, para α = 0 sabemos que $|A|=0$*, luego rang (A) ≤ 2*
Calculemos el rango de A,

$$para \quad \alpha=0 \quad A=\begin{pmatrix}3 & -4 & -2\\ 1 & -2 & -2\\ 2 & -3 & -2\end{pmatrix}$$

busquemos un menor de orden 2 no nulo, por ejemplo,

$$\begin{vmatrix}3 & -4\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-6+4=-2\neq 0, \quad \text{por lo tanto rang(A) = 2}$$

Calculemos el rango de A´

$$para \quad \alpha=0 \quad A'=\begin{pmatrix}3 & -4 & -2 & 4\\ 1 & -2 & -2 & 2\\ 2 & -3 & -2 & 4\end{pmatrix}$$

a partir del menor de orden 2 no nulo de A veamos si conseguimos un menor de orden 3 no nulo de A´,

$$\begin{vmatrix}3 & -4 & 4\\ 1 & -2 & 2\\ 2 & -3 & 4\end{vmatrix}\overset{C_2+C_3}{=}\begin{vmatrix}3 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(6-4)=-2\neq 0, \quad \text{por lo tanto rang(A´) = 3}$$

Como rang(A) ≠ rang(A´), para α= 0 el sistema es incompatible.

b) Valores de α para que el sistema sea compatible y determinado.

Por ser un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas será compatible y determinado cuando rang(A) = rang(A´) = 3.

Según estudiamos al principio $|A| = 0$ *para α = 0 o α = – 1, por lo que para* $\alpha \neq 0$ *y* $\alpha \neq -1$ *rang(A) = 3.*

Como el máximo rango de A´ también es 3, para estos valores de α rang(A´) = 3

Luego, el sistema será compatible y determinado para $\alpha \neq 0$ *y* $\alpha \neq -1$

c) Resolver el sistema para el valor del parámetro α para el cual es compatible indeterminado.

Del estudio realizado al principio sólo nos queda por estudiar el caso en que α = – 1

Según ese estudio, para α = – 1 sabemos que $|A| = 0$*, luego rang (A)* ≤ 2

Calculemos el rango de A,

$$para \quad \alpha = -1 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

En esta matriz se comprueba, fácilmente, que $F_1 = F_3$ *y* $F_1 = 2 \times F_2$*.*
Es decir, sólo tiene una fila linealmente independiente, por lo que su rango es 1.

Calculemos el rango de A´

$$para \quad \alpha = -1 \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

En esta matriz se cumplen las mismas relaciones que en la matriz A.
Por lo tanto su rango es 1.

Hemos obtenido: rang(A) = rang(A´) = 1 < nº de incógnitas, por lo que el sistema es compatible indeterminado

Resolvemos el sistema usando sólo una incógnita (por ser de rango 1), por ejemplo, escogemos la ecuación correspondiente a la 2ª fila y como incógnita principal la x,

$x - 2y - z = 2$

despejamos x, $x = 2 + 2y + z$

Y finalmente, para α = – 1 la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = 2 + 2\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \Re$$