Problema 2.1. Sean A, B y C los puntos de intersección del plano de ecuación x + 4 y – 2 z – 4 = 0 con los tres ejes coordenados OX, OY y OZ, respectivamente. Se pide calcular razonadamente:
a) El área del triángulo ABC. *(1,1 puntos).*
b) El perímetro del triángulo ABC. *(1,1 puntos).*
c) Los tres ángulos interiores del triángulo ABC. *(1,1 puntos).*

Solución:
Calculemos los puntos A, B y C.
A – punto de corte entre el plano y el eje OX

La ecuación del eje OX la podemos dar como intersección de dos planos: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

El sistema a resolver para encontrar el punto A es,

$$\begin{cases} x + 4y - 2z - 4 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de y, z en la primera ecuación obtenemos x – 4 = 0, luego x = 4. El punto A tiene de coordenadas (4 , 0 , 0)

Similarmente obtenemos los restantes puntos.
B – punto de corte entre el plano y el eje OY

El sistema a resolver para encontrar el punto B es,

$$\begin{cases} x + 4y - 2z - 4 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de x, z en la primera ecuación obtenemos 4 y – 4 = 0, luego y = 1. El punto B tiene de coordenadas (0 , 1 , 0)

C – punto de corte entre el plano y el eje OZ

El sistema a resolver para encontrar el punto C es,

$$\begin{cases} x + 4y - 2z - 4 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de x, y en la primera ecuación obtenemos – 2 z – 4 = 0, luego z = – 2. El punto C tiene de coordenadas (0 , 0 , – 2)

a) Área del triángulo ABC.

Para calcular esta área utilizamos la siguiente fórmula $S = \frac{1}{2}\left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right|$

$$\vec{AB} = (0,1,0) - (4,0,0) = (-4,1,0)$$

$$\vec{AC} = (0,0,-2) - (4,0,0) = (-4,0,-2)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -2\,\vec{i} - 8\,\vec{j} + 4\,\vec{k} = (-2,-8,4)$$

$$\left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \left|(-2,-8,4)\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-8)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 64 + 16} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

Finalmente $S = \frac{1}{2} 2\sqrt{21} = \sqrt{21}\ u^2$

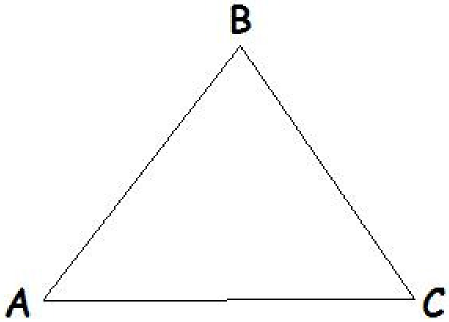
b) Perímetro del triángulo ABC.

$P = d(A,B) + d(B,C) + d(C,A) =$

$$= \sqrt{(0-4)^2 + (1-0)^2 + (0-0)^2} + \sqrt{(0-0)^2 + (0-1)^2 + (-2-0)^2} + \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2 + (0+2)^2} =$$

$$= \sqrt{16+1} + \sqrt{1+4} + \sqrt{16+4} = \sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{17} + \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = \sqrt{17} + 3\sqrt{5} \approx 10'83\ u$$

c) Los tres ángulos interiores del triángulo ABC



Obtengamos los vectores que determinan los tres lados. Anteriormente ya obtuvimos dos de ellos,

$\vec{AB} = (-4,1,0)$

$\vec{AC} = (-4,0,-2)$

Calculemos el tercero

$\vec{BC} = (0,0,-2) - (0,1,0) = (0,-1,-2)$

Procedamos al cálculo de los tres ángulos, para ello utilizamos la fórmula del coseno del ángulo determinado por dos vectores.

$$\cos \hat{A} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\left|\vec{AB}\right|\left|\vec{AC}\right|} = \frac{(-4,1,0)\cdot(-4,0,-2)}{\sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 0^2}\ \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + (-2)^2}} = \frac{16}{\sqrt{17}\ \sqrt{20}} = \frac{16}{\sqrt{17}\ 2\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{85}} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \hat{A} = arc \cos\left(\frac{8}{\sqrt{85}}\right) = 29'805^{\circ}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\left|\vec{BA}\right|\left|\vec{BC}\right|} = \frac{(4,-1,0)\cdot(0,-1,-2)}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + 0^2}\ \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}\ \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{85}} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \hat{B} = arc \cos\left(\frac{1}{\sqrt{85}}\right) = 83'773^{\circ}$$

y finalmente $\hat{C} = 180^{\circ} - 29'805^{\circ} - 83'773^{\circ} = 66'422^{\circ}$