**Problema 2.2.** Dados los puntos O = (0,0,0), A = (4,4,0) y P = (0,0,12), se pide obtener razonadamente:
a) La ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular al plano de ecuación z = 0. *(1 punto).*
b) La ecuación de un plano que cumpla las dos condiciones siguientes:

- Pase por P y por un punto Q de la recta de ecuación x = y = 4
- Sea perpendicular a la recta que pasa por O y Q. *(2,3 puntos por hallar uno de los dos planos solución).*

*Solución:*
*a) Recta que pasa por A ( 4, 4 , 0 ) y $\perp$ al plano z = 0.*
*Como la recta debe ser perpendicular al plano, el vector normal del plano será director de la recta.*
*Del plano z = 0 un vector normal es ( 0 , 0 , 1 ), por lo tanto de la recta pedida conocemos:*

*punto A ( 4 , 4 , 0 ) y vector director $\vec{v}$ ( 0 , 0 , 1 ), la ecuación de la recta será,*
*ecuación paramétrica:*

$$\begin{cases} x = 4 + 0\lambda \\ y = 4 + 0\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 0 + \lambda \end{cases} \quad \textit{simplificando} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \quad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$

*ecuación continua:*

$$\frac{x-4}{0} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-0}{1}$$

*b) Q es un punto de la recta r de ecuación x = y = 4, luego las coordenadas de Q serán ( 4 , 4 , λ ), siendo λ un número real.*

$$Plano, \pi, \ que \left\langle \begin{array}{l} pasa \ por \ los \ puntos \ P(0,0,12) \ y \ Q(4,4,\lambda) \\ y \\ \perp \ recta \ s \ que \ pasa \ por \left\langle \begin{array}{l} O(0,0,0) \\ Q(4,4,\lambda) \end{array} \right. \rightarrow \ \vec{v}_s(4,4,\lambda) \end{array} \right.$$

$$\pi \perp s \quad \rightarrow \quad \vec{n}_\pi = (4,4,\lambda)$$

$$como \ P \ y \ Q \in \pi \quad \rightarrow \quad \vec{PQ} \perp \vec{n}_\pi \quad \rightarrow \quad \vec{PQ} \,.\, \vec{n}_\pi = 0$$

$$\vec{PQ} = (4,4,\lambda - 12)$$

$$\vec{PQ} \,.\, \vec{n}_\pi = (4,4,\lambda - 12) \,.\, (4,4,\lambda) = 16 + 16 + \lambda^2 - 12\lambda = \lambda^2 - 12\lambda + 32$$

$$luego \quad \lambda^2 - 12\lambda + 32 = 0$$

$$\lambda = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4.1.32}}{2.1} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 128}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{12 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{12+4}{2} = 8 \\ \frac{12-4}{2} = 4 \end{array} \right.$$

$$Para \quad \lambda = 8$$

$$\vec{n}_\pi = (4,4,8) \approx (1,1,2) \quad \rightarrow \quad \pi : \quad x + y + 2z + D = 0$$

$$P(0,0,12) \in \pi \quad \rightarrow \quad 0 + 0 + 2\,.\,12 + D = 0 \quad \rightarrow \quad 24 + D = 0 \quad \rightarrow \quad D = -24$$

$$luego \quad \pi : x + y + 2z - 24 = 0$$

*Para* $\lambda = 4$

$\vec{n}_\pi = (4,4,4) \approx (1,1,1) \quad \rightarrow \quad \pi: \quad x + y + z + D = 0$

$P(0,0,12) \in \pi \quad \rightarrow \quad 0 + 0 + 12 + D = 0 \quad \rightarrow \quad 12 + D = 0 \quad \rightarrow \quad D = -12$

*luego* $\pi: x + y + z - 12 = 0$

*Por lo tanto el plano buscado puede ser:* $x + y + 2z - 24 = 0$ *o* $x + y + z - 12 = 0$