Problema 3.1.

a) Determinar, razonadamente, el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\dfrac{1}{(3-x)(3+x)}$. *(1 punto).*

b) Obtener razonadamente los valores A y B tales que $\dfrac{1}{(3-x)(3+x)}=\dfrac{A}{3-x}+\dfrac{B}{3+x}$. *(1 punto).*

c) Calcular razonadamente el área de la superficie S limitada por la curva $y=\dfrac{1}{(3-x)(3+x)}$, el eje OX y las rectas de ecuaciones x = – 2 y x = 2 . *(1,3 puntos).*

Solución:

a) Dominio e intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Dom f(x)

Como f(x) es una función racional busquemos las raíces del denominador,

$$(3-x)(3+x)=0\begin{cases}3-x=0 & \rightarrow \quad x=3\\ 3+x=0 & \rightarrow \quad x=-3\end{cases}$$

$$Luego \quad Dom\ f(x)=\Re-\{-3\ ,\ 3\}$$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Debemos estudiar el signo de f´(x).

$$f(x)=\frac{1}{(3-x)(3+x)}=\frac{1}{9-x^2}$$

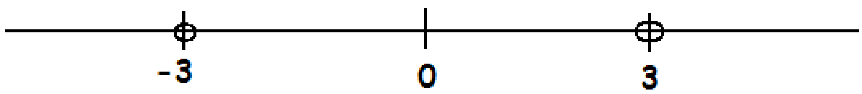
$$f'(x)=\frac{-(-2x)}{\left(9-x^2\right)^2}=\frac{2x}{\left(9-x^2\right)^2}$$

Buscamos las raíces del numerador y denominador,

$2x=0;\ x=0$

$(9-x^2)^2=0;\ 9-x^2=0;\ x^2=9;\ \ x=\pm 3$

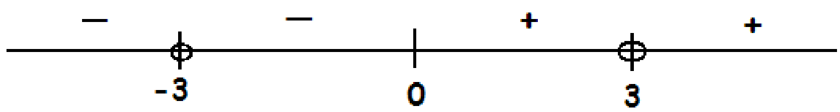
Marcamos en la recta real las raíces obtenidas anteriormente y tenemos en cuenta en dominio de la función,



Como el denominador de f´(x) está elevado al cuadrado será positivo, por lo que el signo de f´(x) sólo depende del numerador que es 2 x

$2x>0;\ \ x>0$

Y el signo de f´(x) será



f(x) es decreciente en (– ∞ , – 3) ∪ (– 3 , 0) y es creciente en (0 , 3) ∪ (3 , + ∞)

b) Efectuando la suma que queda indicada,

$$\frac{1}{(3-x)(3+x)}=\frac{A}{3-x}+\frac{B}{3+x}=\frac{A\,(3+x)+B\,(3-x)}{(3-x)(3+x)}$$

Luego debe ser 1 = A (3 + x) + B (3 – x), buscamos los valores de A y B dándole valores a x

para x = 3 1 = A (3 + 3) + B (3 – 3)

1 = 6 A

$$A=\frac{1}{6}$$

para $x = -3$ $\quad 1 = A\,(3-3) + B\,(3-(-3))$

$$1 = 6B$$

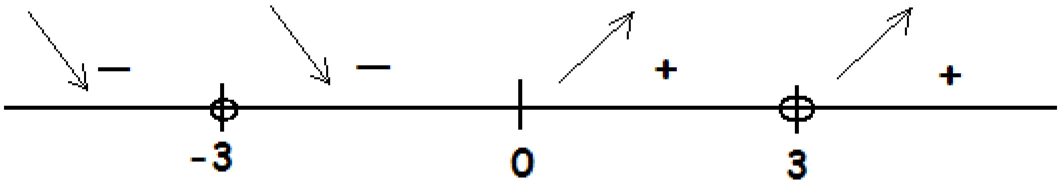
$$B = \frac{1}{6}$$

c) Para calcular esta área debemos dibujar, de forma aproximada, la curva dada

La curva corresponde a la función estudiada en el apartado a). Por lo tanto conocemos:

su dominio, $\quad Dom\ y = \Re - \{-3, 3\}$

y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento:



De lo anterior deducimos que en x = 0 la curva tiene un mínimo relativo

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{(3-0)(3+0)} = \frac{1}{9} \quad \rightarrow \quad \textit{mínimo relativo} \quad \left(0\,,\frac{1}{9}\right)$$

Puntos de corte con el eje OX

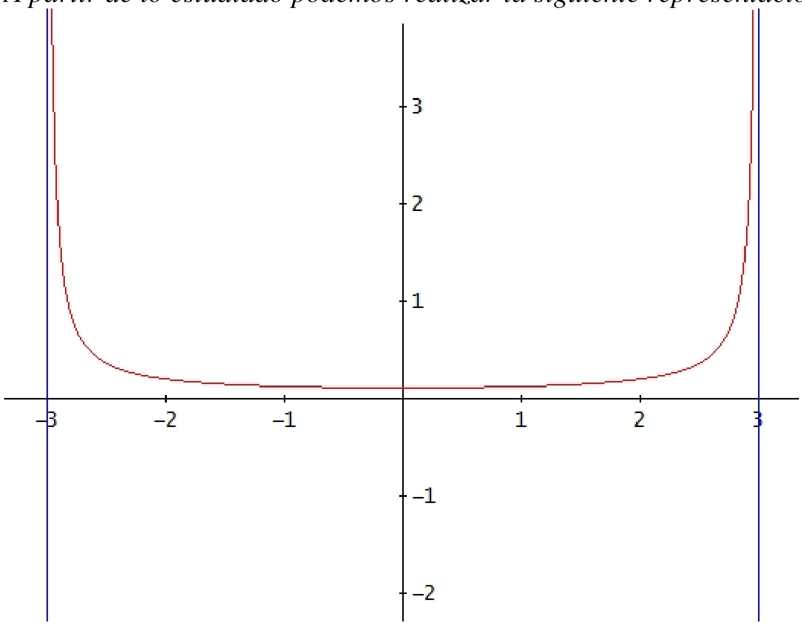
$$y = 0, \quad \frac{1}{(3-x)(3+x)} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 = 0 \quad \textit{no tiene solución}$$

Posibles asíntotas verticales $x = -3$ *y* $x = 3$*; veámoslo,*

$$\lim_{x\to -3} \frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{1}{6\,.\,0} = \frac{1}{0} = \infty \quad \textit{luego } x = -3 \textit{ es una asíntota vertical}$$

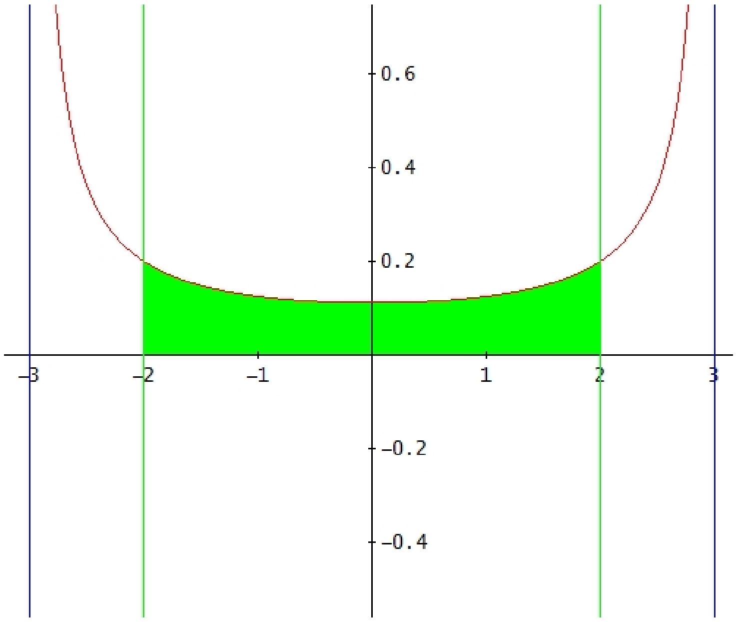
$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{1}{0\,.\,6} = \frac{1}{0} = \infty \quad \textit{luego } x = 3 \textit{ es una asíntota vertical}$$

A partir de lo estudiado podemos realizar la siguiente representación,



No es necesario realizar más cálculos sobre la representación de la curva puesto que el área buscada está limitada por las rectas verticales x = – 2 y x = 2 y hemos representado la curva entre – 3 y 3

Gráficamente, el área que debemos calcular es,



El cálculo de esta área lo realizamos mediante la siguiente integral

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{(3-x)(3+x)} dx =$$

por el apartado b) sabemos que,

$$\int_{-2}^{2} \left[\frac{1/6}{(3-x)} + \frac{1/6}{(3+x)} \right] dx =$$

$$= \left[\frac{-1}{6} Ln|3-x| + \frac{1}{6} Ln|3+x| \right]_{-2}^{2} =$$

$$= \frac{-1}{6} Ln|3-2| + \frac{1}{6} Ln|3+2| - \left[\frac{-1}{6} Ln|3+2| + \frac{1}{6} Ln|3-2| \right] = \frac{-1}{6} Ln\ 1 + \frac{1}{6} Ln\ 5 + \frac{1}{6} Ln\ 5 - \frac{1}{6} Ln\ 1 =$$

$$= (como \quad Ln\ 1 = 0) = \frac{2}{6} Ln\ 5 = \frac{1}{3} Ln\ 5$$

Finalmente, el área de la superficie pedida es $\frac{1}{3} Ln\ 5\ u^2 \approx 0'5365\ u^2$