Problema 3.2. Dada la función real f (x) = $e^x - e^{-x}$, se pide calcular razonadamente:

a) La función f(x) + f(– x). *(1,1 puntos).*

b) La integral $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$, donde a es un número real positivo. *(1,1 puntos).*

c) El punto de inflexión de f(x). *(1,1 puntos).*

Solución:

a)

$$f(x) + f(-x) = e^x - e^{-x} + e^{-x} - e^{-(-x)} = \underline{e^x} \; \underline{-\; e^{-x}} + \underline{e^{-x}} \; \underline{-\; e^x} = 0$$

b)

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \left(e^x - e^{-x}\right) dx = \left[e^x + e^{-x}\right]_{-a}^{a} = e^a + e^{-a} - \left(e^{-a} + e^{-(-a)}\right) =$$

$$= e^a + e^{-a} - e^{-a} - e^a = 0$$

c) Punto de inflexión de f(x)

$$f(x) = e^x - e^{-x}$$

$$f'(x) = e^x + e^{-x}$$

$$f''(x) = e^x - e^{-x}$$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; e^x - e^{-x} = 0 \;\rightarrow\; e^x = e^{-x} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; e^x = \frac{1}{e^x} \;\rightarrow\; e^x e^x = 1 \;\rightarrow\; e^{2x} = 1 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$$

Estudiemos el signo de f´´(x) a la izquierda y derecha de x = 0

x	$f''(x)$
-1	$e^{-1} - e^{1} = \frac{1}{e} - e = -2'350 < 0$
1	$e^{1} - e^{-1} = e - \frac{1}{e} = 2'350 > 0$

Por lo tanto como f´´(x) cambia de signo en x = 0, en x = 0 hay un punto de inflexión.

x = 0, f(0) = $e^0 - e^0 = 1 - 1 = 0$

Luego el punto de inflexión de f(x) es (0 , 0).