Problema 4.1. Se desea construir una bodega con forma de paralelepípedo de 100 m^3 de volumen de manera que el largo de su base sea 3/4 de la anchura x de su base. Se sabe que los precios de un metro cuadrado de suelo, de techo y de pared lateral son, respectivamente, 225 €/m^2, 300 €/m^2 y 256 €/m^2. Determinar razonadamente:

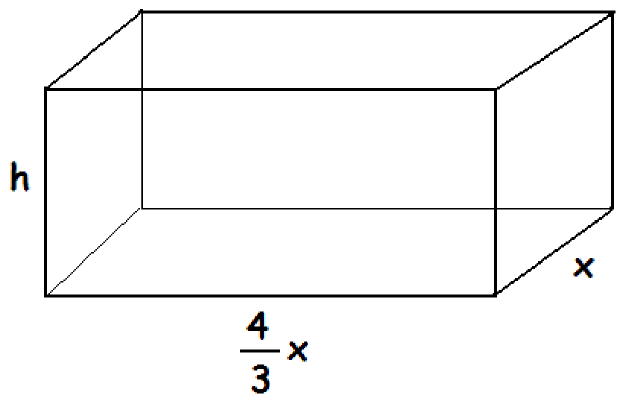
a) El valor x de la anchura de la base que minimiza el coste. *(2,3 puntos).*

b) Dicho coste mínimo. *(1 punto).*

Solución:

a) Calcular el valor x de la anchura que minimiza el coste..

La bodega a construir es, según el enunciado,



Sabemos que
El precio del suelo es de 225 €/m^2
El precio del techo es de 300 €/m^2
El precio de la pared lateral es de 256 €/m^2

El coste de la bodega, C, será

$$C = 225\frac{4}{3}x\ x + 300\frac{4}{3}x\ x + 2\ .\ 256\ x\ h + 2\ .\ 256\frac{4}{3}x\ h = 300x^2 + 400x^2 + 512\ x\ h + \frac{2048}{3}\ x\ h =$$

$$= 700x^2 + \frac{3584}{3}\ x\ h$$

Para poder encontrar el mínimo de C debemos tener una sola variable. Busquemos la relación entre x y h. Esta relación nos la da el volumen de la bodega, 100m^3.

$$V = x\ \frac{4}{3}\ x\ h = 100 \quad \rightarrow \quad x^2 h = \frac{300}{4} \quad \rightarrow \quad x^2 h = 75 \quad \rightarrow \quad h = \frac{75}{x^2}$$

$$\textit{Luego} \quad C = 700x^2 + \frac{3584}{3}\ x\ \frac{75}{x^2} = 700x^2 + \frac{89600}{x}$$

Por ser x y h longitudes, y teniendo en cuenta la relación entre ellas $x^2\ h = 75$, los valores que puede tomar la variable x son todos los reales positivos, es decir que Dom C = (0 , +∞).

Busquemos el mínimo de C,

$$C' = 1400x - \frac{89600}{x^2}$$

$$1400x - \frac{89600}{x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad 1400x^3 - 89600 = 0 \quad \rightarrow \quad 1400x^3 = 89600 \quad \rightarrow \quad x^3 = \frac{89600}{1400} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x^3 = 64 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{64} = 4$$

Estudiemos el signo de C´ a la izquierda y derecha de 4 para determinar si es un mínimo,

x	*C´*
1	$1400\ .\ 1 - \frac{89600}{1^2} = -88200 < 0$
5	$1400\ .\ 5 - \frac{89600}{5^2} = 3416 > 0$

Luego en x = 4 hay un mínimo relativo y, además, como en (0 , 4) la función C es decreciente y en (4 , +∞) es creciente el mínimo es absoluto.

El valor de x que minimiza el coste es 4, es decir, hay que construir una bodega cuya base tenga una anchura de 4 m.

b) El coste mínimo.

$$C(4) = 700 \, . \, 4^2 + \frac{89600}{4} = 33600$$

El coste mínimo de la bodega es de 33600€