PROBLEMA A.1. Dadas las matrices cuadradas

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad y \quad A=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{pmatrix}$$

a) Calcular las matrices $(A-I)^2$ y $A(A-2I)$. *(4 puntos)*

b) Justificar razonadamente que

b.1) Existen las matrices inversas de las matrices A y A – 2 I. *(2 puntos)*

b.2) No existe la matriz inversa de la matriz A – I. *(2 puntos)*

c) Determinar el valor del parámetro real λ para el que se verifica que $A^{-1}=\lambda(A-2I)$. *(2 puntos)*

Solución:

a) Cálculo de $(A-I)^2$

$$A-I=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{pmatrix}$$

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2-3&1+2-3&1+2-3\\2+4-6&2+4-6&2+4-6\\-3-6+9&-3-6+9&-3-6+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$(A-I)^2$ es la matriz nula.

Cálculo de $A(A-2I)$

$$A-2I=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&2\\-3&-3&-4\end{pmatrix}$$

$$A(A-2I)=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&2\\-3&-3&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

b) Para que exista la matriz inversa, el determinante de la matriz debe ser distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{vmatrix}=-12-6-6+9+12+4=1\neq 0 \quad\rightarrow\quad \exists\, A^{-1}$$

$$|A-2I|=\begin{vmatrix}0&1&1\\2&1&2\\-3&-3&-4\end{vmatrix}=-6-6+3+8=-1\neq 0 \quad\rightarrow\quad \exists\,(A-2I)^{-1}$$

$$|A-I|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{vmatrix}=(como\ F_2=2F_1)=0$$ *Por lo tanto no existe la inversa de la matriz A – I.*

c) Buscamos el valor de λ / $A^{-1} = \lambda\,(A - 2I)$

Multiplicando la expresión anterior por la matriz A por la izquierda,

$A\,A^{-1} = A\,\lambda\,(A - 2I)$

como λ *es un número real,* $A\lambda = \lambda A$

$I = \lambda\,A\,(A - 2I)$

la matriz $A\,(A - 2I)$ *la hemos calculado en el apartado a), planteamos la igualdad matricial:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad \lambda = -1$$