PROBLEMA A.2. Dadas las rectas de ecuaciones

$$r:\begin{cases}5x+y-z=4\\2x-2y-z=-5\end{cases}\qquad y\qquad s:\begin{cases}x-y=-5\\z=4\end{cases}$$

se pide:

a) Justificar que las rectas r y s se cruzan. *(4 puntos)*
b) Calcular razonadamente la distancia entre las rectas r y s. *(3 puntos)*
c) Determinar la ecuación del plano π que es paralelo y equidistante a las rectas r y s. *(3 puntos)*

Solución:
a) Para comprobar que las rectas r y s se cruzan calculemos punto y vector director de cada una de ellas.

$$r:\begin{cases}5x+y-z=4\\2x-2y-z=-5\end{cases}$$

$$\textit{Punto}\quad x=0\ \rightarrow\ \begin{cases}y-z=4\\-2y-z=-5\end{cases}\ \rightarrow\ \begin{cases}y-z=4\\2y+z=5\end{cases}\ \rightarrow$$

$$\textit{sumando ambas ecuaciones}\ \rightarrow\ 3y=9\ \rightarrow\ y=3$$

$$\textit{sustituyendo en 1ª}\ \rightarrow\ 3-z=4\ \rightarrow\ z=-1$$

$$P_r(0,3,-1)$$

$$\textit{vector director}\quad \vec{v_r}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\5&1&-1\\2&-2&-1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1&-1\\-2&-1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}5&-1\\2&-1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}5&1\\2&-2\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}(-1-2)-\vec{j}(-5+2)+\vec{k}(-10-2)=-3\,\vec{i}+3\,\vec{j}-12\,\vec{k}=(-3,3,-12)$$

$$\textit{luego}\quad \vec{v_r}\ (-1,1,-4)$$

$$s:\begin{cases}x-y=-5\\z=4\end{cases}$$

$$\textit{Punto}\quad x=0\ \rightarrow\ \begin{cases}-y=-5\\z=4\end{cases}\ \rightarrow\ \begin{cases}y=5\\z=4\end{cases}\ \rightarrow\quad P_s(0,5,4)$$

$$\textit{vector director}\quad \vec{v_s}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1&0\\0&1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1&-1\\0&0\end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}+0\,\vec{k}=$$

$$=-\vec{i}-\vec{j}=(-1,-1,0)$$

$$\textit{luego}\quad \vec{v_s}\ (1,1,0)$$

Procedamos a comprobar que las rectas se cruzan. Vamos a realizar los cálculos de dos formas distintas.
Primera forma.

$$\overrightarrow{v_r}\,(-1,1,4) \quad y \quad \overrightarrow{v_s}\,(1,1,0) \quad \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{1} \quad \rightarrow \qquad \textit{no son paralelos}$$

Veamos si las rectas se cortan, para ello resolvemos el sistema formado por las cuatro ecuaciones que definen las rectas,

$$\begin{cases} 5x+y-z=4 \\ 2x-2y-z=-5 \\ x-y=5 \\ z=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x+y-4=4 \\ 2x-2y-4=-5 \\ x-y=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x+y=8 \\ 2x-2y=-1 \\ x-y=5 \end{cases}$$

La segunda y tercera ecuaciones son incompatibles, coeficientes de incógnitas proporcionales pero no los términos independientes, por lo tanto el sistema no tiene solución.

Rectas con vectores directores no paralelos y que no se cortan, las rectas r y s se cruzan.

Segunda forma.

Estudiar y comparar los rangos de las siguientes matrices:

$$M=\left(\overrightarrow{v_r} \quad \overrightarrow{v_s}\right) \quad y \quad M'=\left(\overrightarrow{v_r} \quad \overrightarrow{v_s} \;\middle|\; \overrightarrow{P_r P_s}\right)$$

$$\overrightarrow{P_r P_s}=(0,5,4)-(0,3,-1)=(0,2,5)$$

$$M'=\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} en\ M \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1-1=-2\neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(M)=2 \\ en\ M' \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -5-8-5=-18\neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(M')=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad se\ cruzan$$

b) d(r,s)

Como las rectas r y s se cruzan podemos calcular la distancia entre ellas mediante la expresión:

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{v_r}\,,\,\overrightarrow{v_s}\,,\,\overrightarrow{P_r P_s}\right]\right|}{\left|\,\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{v_s}\,\right|}$$

$$\left|\left[\overrightarrow{v_r}\,,\,\overrightarrow{v_s}\,,\,\overrightarrow{P_r P_s}\right]\right| = \left|\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix}\right| = (\textit{calculado en el apartado anterior}) = |-18| = 18$$

$$\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\,\vec{i}-4\,\vec{j}-2\,\vec{k}=(4,-4,-2)$$

$$\left|\,\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{v_s}\,\right| = \sqrt{4^2+(-4)^2+(-2)^2} = \sqrt{36} = 6$$

Finalmente $\quad d(r,s)=\dfrac{18}{6}=3\,u.\,l.$

También podemos calcular la distancia entre dos rectas que se cruzan de esta otra forma.
Vamos a buscar un punto de la recta r y otro punto de la recta s de forma que el vector que forman estos dos puntos sea perpendicular a las dos rectas, de esta forma la distancia entre las dos rectas será la distancia entre esos dos puntos.
Sea P un punto cualquiera de r,

$$r:\begin{cases} P_r(0,3,1) \\ \overrightarrow{v_r}(-1,1,-4) \end{cases} \rightarrow \quad P(-\lambda, 3+\lambda, 1-4\lambda)$$

Sea Q un punto cualquiera de s,

$$s:\begin{cases} P_s(0,5,4) \\ \overrightarrow{v_s}(1,1,0) \end{cases} \rightarrow \quad Q(\mu, 5+\mu, 4)$$

Luego $\overrightarrow{PQ} = (\mu+\lambda,\ \mu-\lambda+2,\ 4\lambda+5)$

Buscamos los valores de λ *y* μ *de forma que* $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{v_r}$ *y* $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{v_s}$

$$\begin{cases} (\mu+\lambda,\ \mu-\lambda+2,\ 4\lambda+5)\ (-1,1,-4)=0 \\ (\mu+\lambda,\ \mu-\lambda+2,\ 4\lambda+5)\ (1,1,0)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\mu-\lambda+\mu-\lambda+2-16\lambda-20=0 \\ \mu+\lambda+\mu-\lambda+2=0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \begin{cases} -18\lambda-18=0 \\ 2\mu+2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda=-1 \\ \mu=-1 \end{cases}$$

Para $\lambda=-1 \rightarrow P_0(1,2,3)$

Para $\mu=-1 \rightarrow Q_0(-1,4,4)$

Finalmente, $d(r,s)=d(P_0,Q_0)=\sqrt{(-1-1)^2+(4-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{4+4+1}=3$

c) Ecuación del plano π que es paralelo y equidistante a las rectas r y s.
La ecuación de este plano vamos a obtenerla de dos formas, análogamente a lo realizado en los apartados anteriores.
Primera forma.

Como $\pi // r \text{ y } s \rightarrow \overrightarrow{n_\pi}=\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{v_s}=(4,-4,-2)$ *(del apartado b))*

Luego el plano π paralelo a r y s tiene por ecuación: 4 x – 4 y – 2 z + D = 0 y debe cumplir que d(π, r) = d(π, s)

Como $\pi // r \rightarrow d(\pi,r)=d(\pi,P_r)=\dfrac{|4.0-4.3-2.(-1)+D|}{\sqrt{4^2+(-4)^2+(-2)^2}}=\dfrac{|-10+D|}{6}$

$P_r(0,3,-1)$

Como $\pi // s \rightarrow d(\pi,s)=d(\pi,P_s)=\dfrac{|4.0-4.5-2.4+D|}{\sqrt{4^2+(-4)^2+(-2)^2}}=\dfrac{|-28+D|}{6}$

$P_s(0,5,4)$

Igualando las distancias $\dfrac{|-10+D|}{6}=\dfrac{|-28+D|}{6} \rightarrow |-10+D|=|-28+D| \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} -10+D=-28+D \rightarrow -10=-28 \quad \text{No tiene solución} \\ -10+D=-(-28+D) \rightarrow -10+D=28-D \rightarrow 2D=38 \rightarrow D=19 \end{cases}$$

El plano π será: 4 x – 4 y – 2 z + 19 = 0

Segunda forma.

Considerando el proceso de resolución del apartado b), en la segunda forma, el plano π *pasará por el punto medio del segmento de extremos* P_0 *y* Q_0 *y sus vectores directores serán los de las rectas* r *y* s*,*

$$P_M = \left(\frac{1-1}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{3+4}{2}\right) = \left(0, 3, \frac{7}{2}\right)$$

La ecuación del plano π *la obtenemos de la siguiente forma,*

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-3 & z-\frac{7}{2} \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$x\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \left(z-\frac{7}{2}\right)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$4x - (y-3)\,4 + \left(z-\frac{7}{2}\right)(-2) = 0$$

$$4x - 4y + 12 - 2z + 7 = 0$$

$$4x - 4y - 2z + 19 = 0$$

El plano π ***será:*** $\boldsymbol{4x - 4y - 2z + 19 = 0}$